

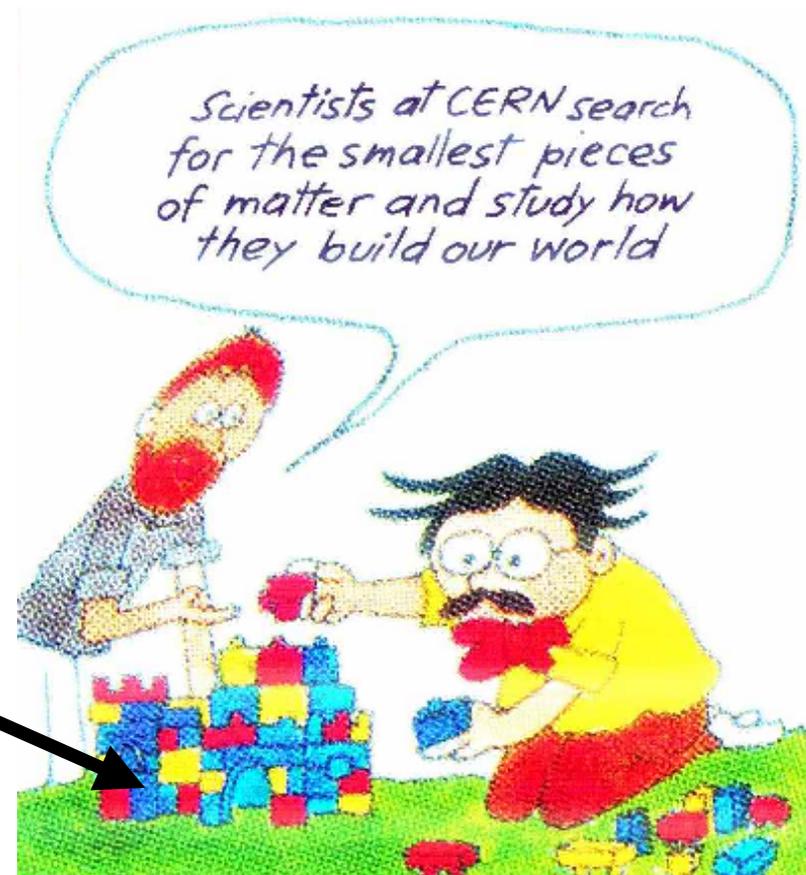
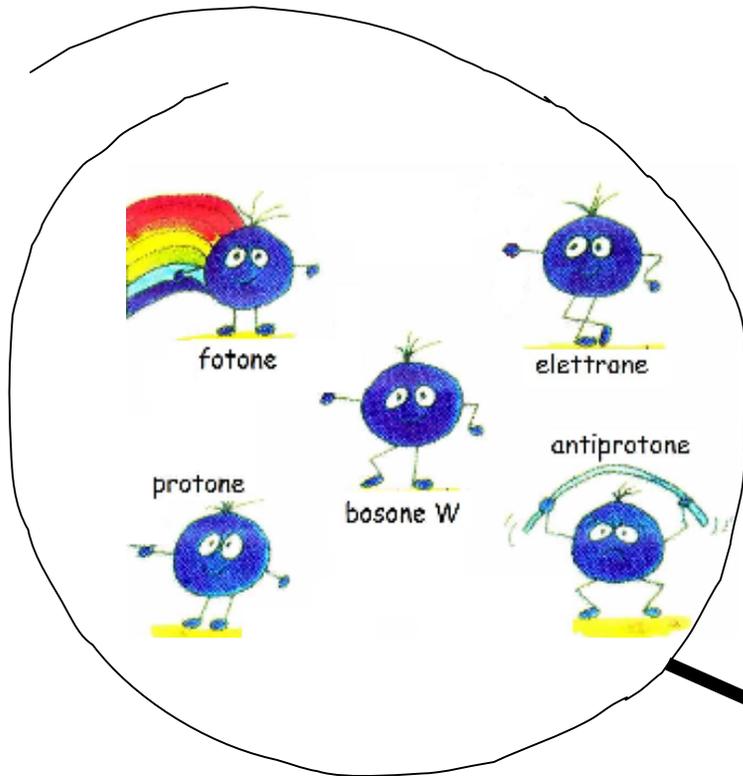
Elementi di Statistica

1

... diamo un senso

... cosa e' la Fisica delle Particelle Elementari ?

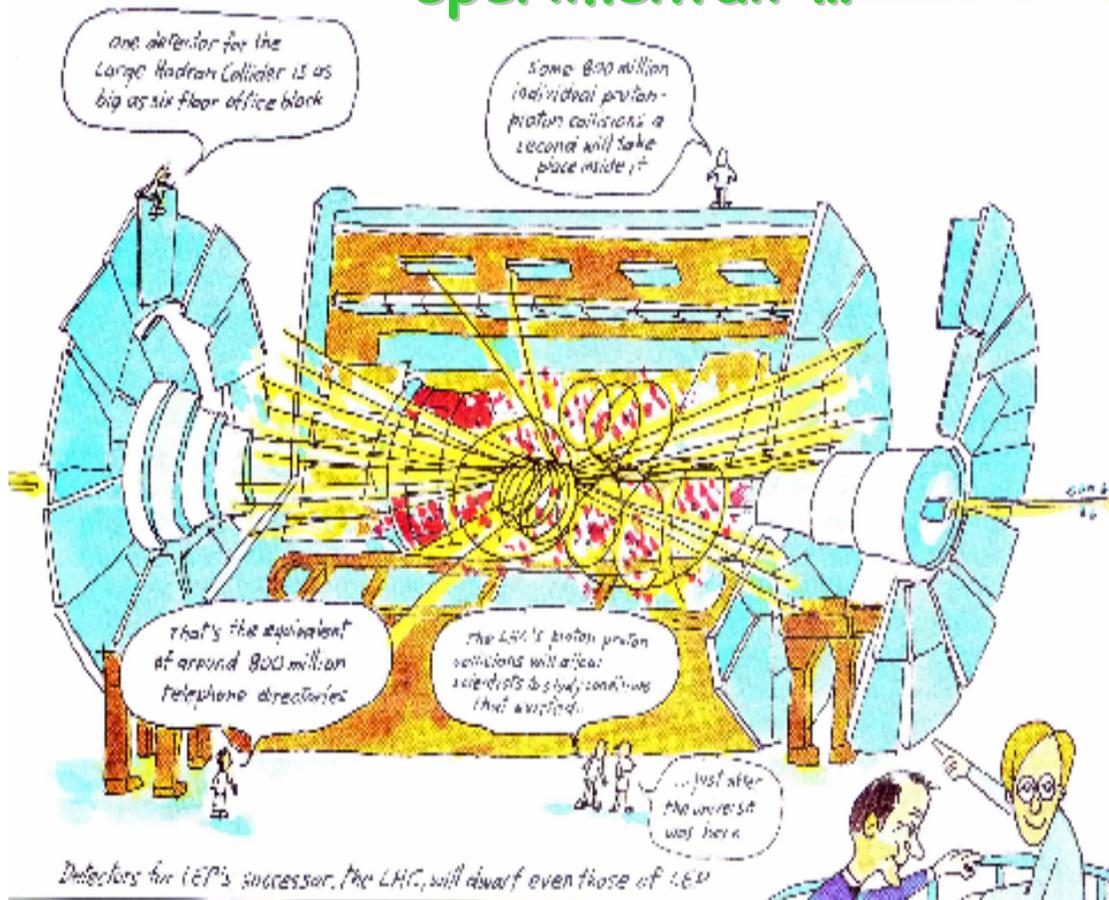
Spiega il complesso
mediante il semplice
nel mondo dell'infinitamente piccolo ...



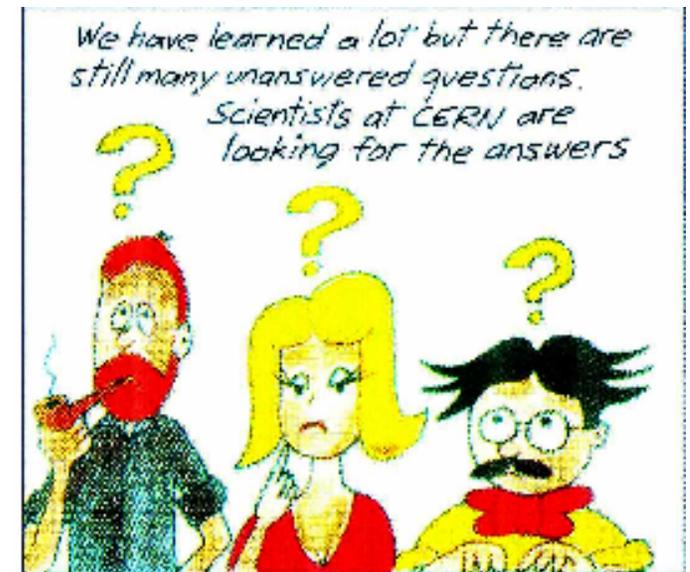
all'attacco !!! ...

... applicando la ben nota manovra a tenaglia :
il metodo scientifico

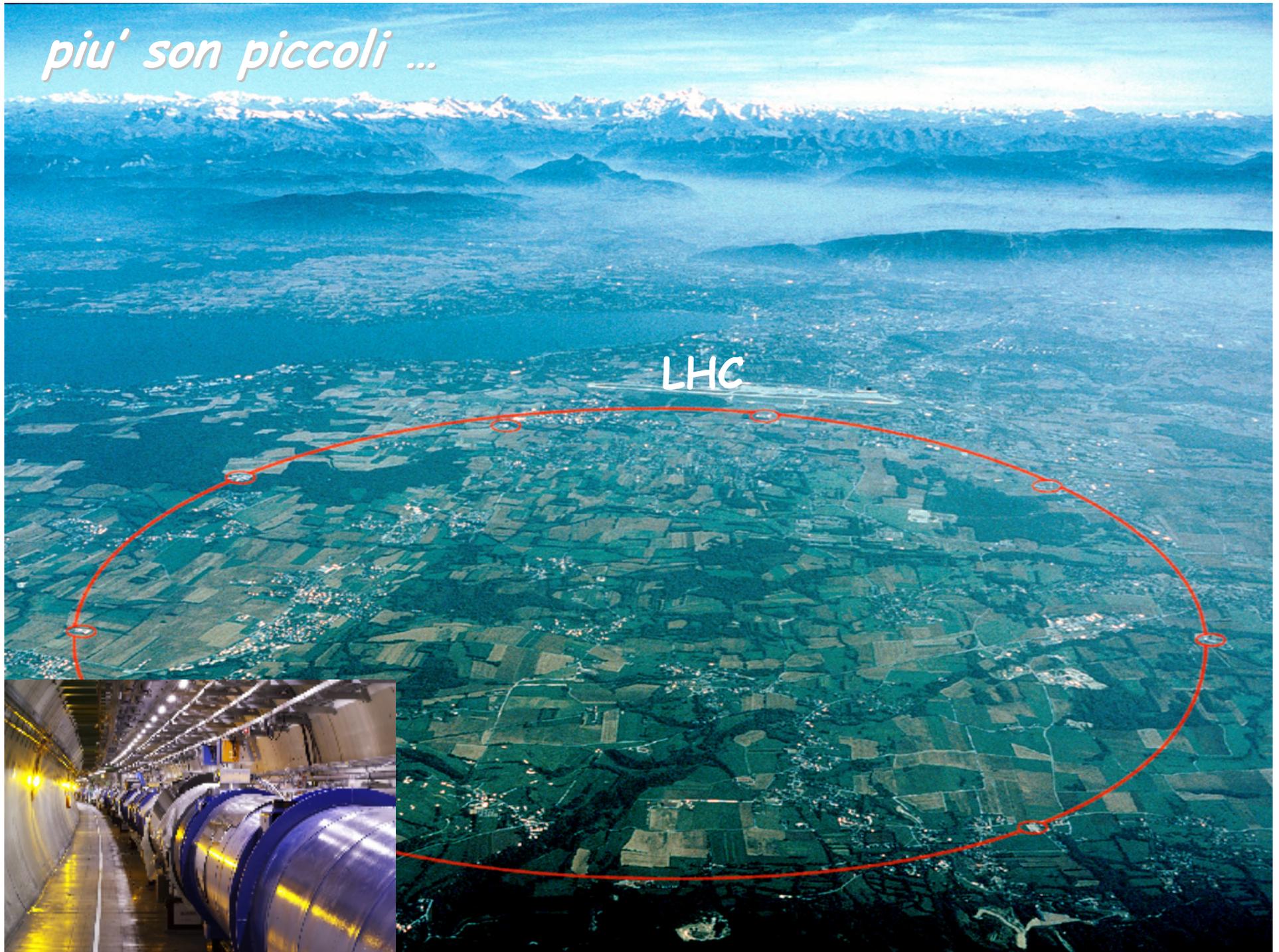
sperimentali ...



... teorici



piu' son piccoli ...



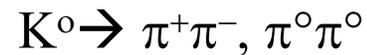
LHC

... cosa si misura nella HEP ?



Parametri fondamentali

- Branching ratio (BR)
- vita media (τ)
- massa (m)
- costanti di accoppiamento
-



attraverso...

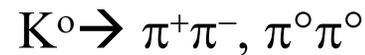
- quantita' di moto \vec{q} ;
- energia E rilasciata nel calorimetro ;
- angoli e direzioni delle particelle prodotte ;
- intervalli temporali ;
- efficienza del rivelatore ;
- contaminazione in un campione ;
- ecc.

... cosa si misura nella HEP ?



Parametri fondamentali

- Branching ratio (BR)
- vita media (τ)
- massa (m)
- costanti di accoppiamento
-

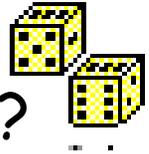


attraverso...

- quantita' di moto \vec{q} ;
- energia E rilasciata nel calorimetro ;
- angoli e direzioni delle particelle prodotte ;
- intervalli temporali ;
- efficienza del rivelatore ;
- contaminazione in un campione ;
- ecc.

New physics ! ! !

BR, branching ratio

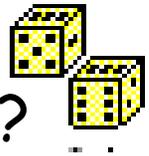


Canali	BR
$\Phi \rightarrow K^+ K^-$	(~ 49 %)
$K_S K_L$	(~ 34 %)
$\pi^+ \pi^- \pi^0$	(~ 15 %)
$\eta \gamma$	(~ 1.3%)

...e il determinismo dove e' finito ?

- Nel mondo dell'infinitamente piccolo le condizioni iniziali non possono essere determinate in modo completo (**principio di indeterminazione**). Ne segue che nel mondo delle particelle elementari le leggi sono sempre **leggi di probabilita'**.

BR, branching ratio



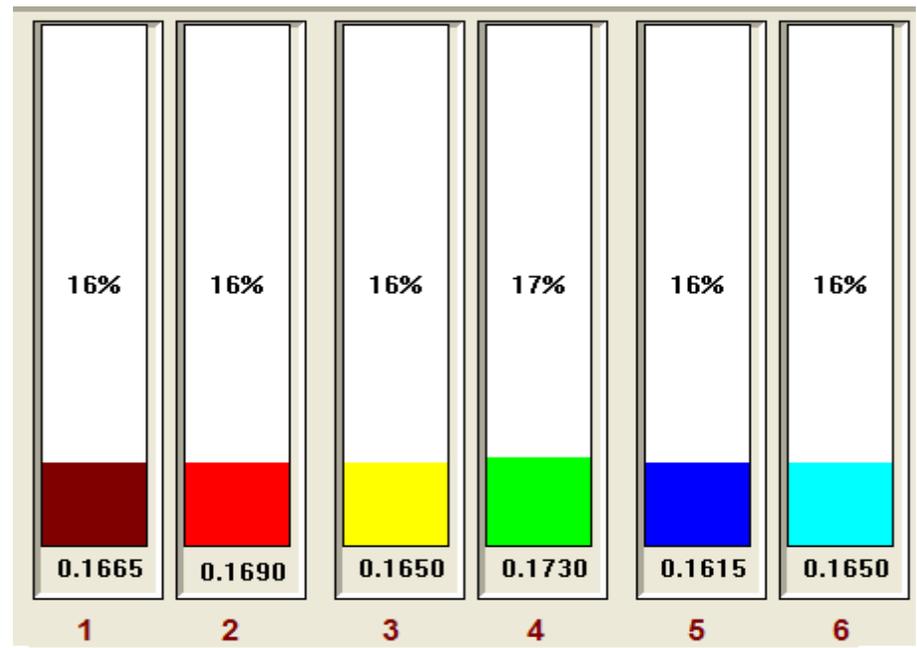
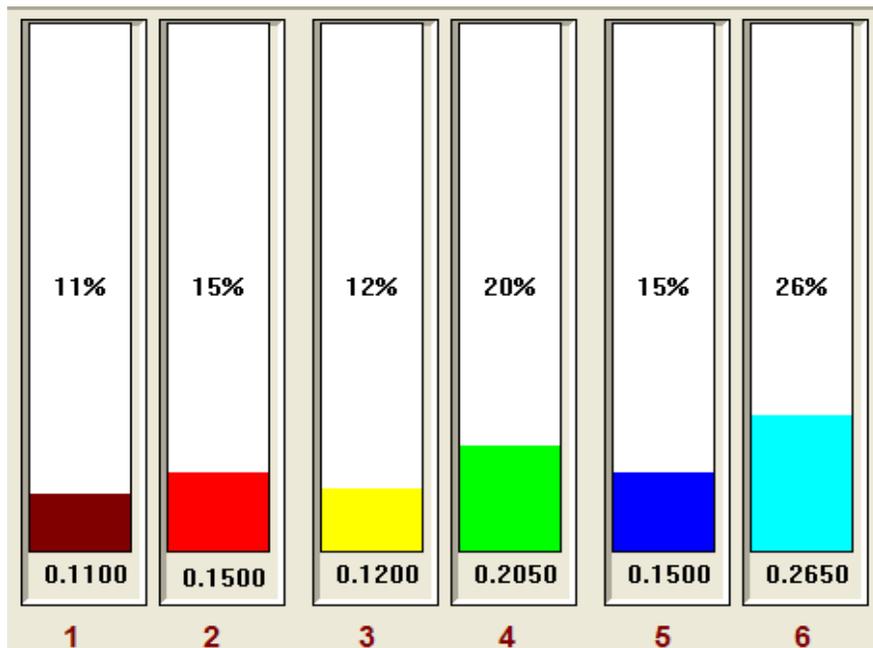
Canali	BR
$\Phi \rightarrow K^+ K^-$	(~ 49 %)
$K_S K_L$	(~ 34 %)
$\pi^+ \pi^- \pi^0$	(~ 15 %)
$\eta \gamma$	(~ 1.3%)

...e il determinismo dove e' finito ?

- Nel mondo dell'infinitamente piccolo le condizioni iniziali non possono essere determinate in modo completo (**principio di indeterminazione**). Ne segue che nel mondo delle particelle elementari le leggi sono sempre **leggi di probabilita'**.

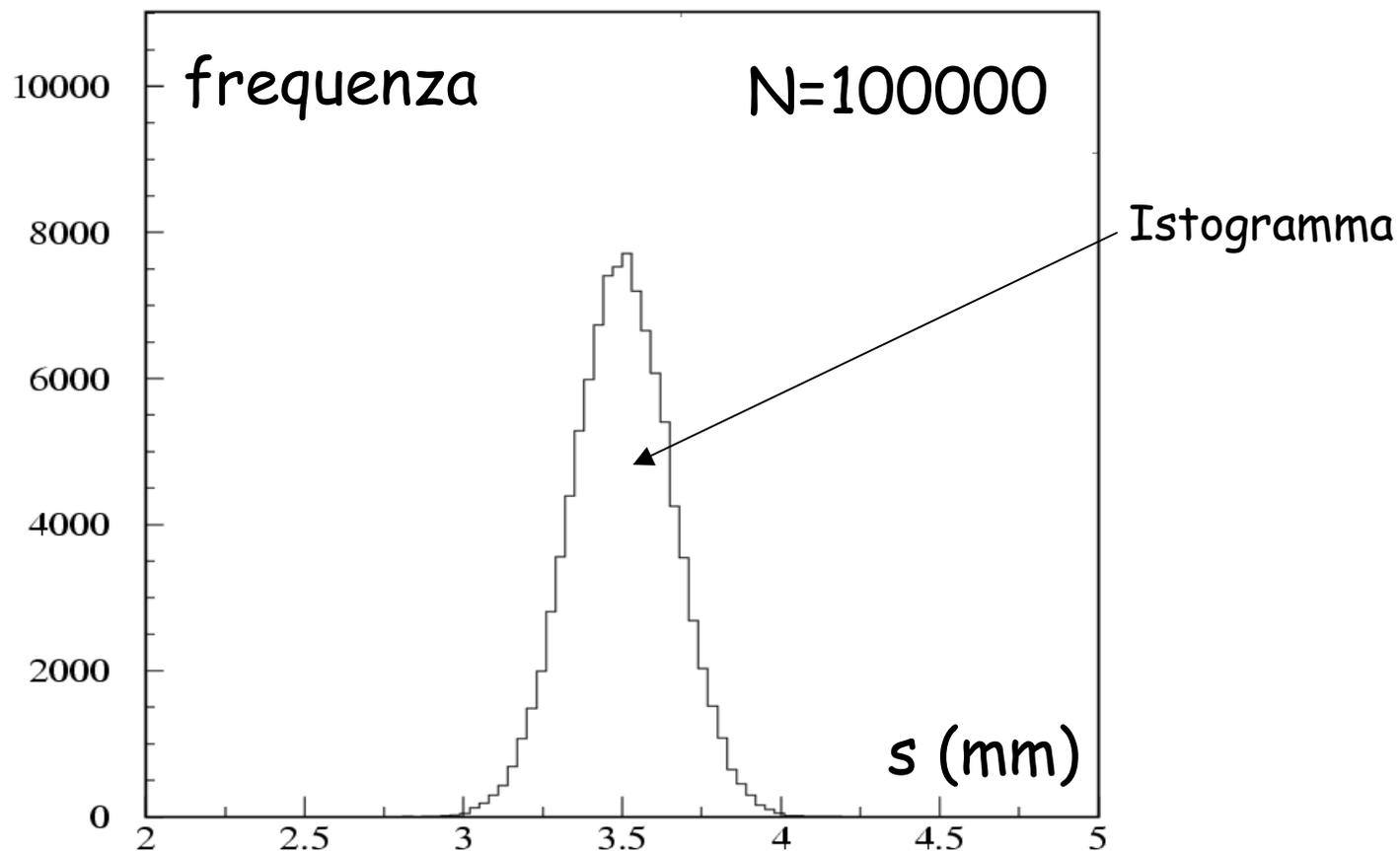
N=200 lanci

N=2000 lanci



*una cosiddetta
misura 'semplice' ...*

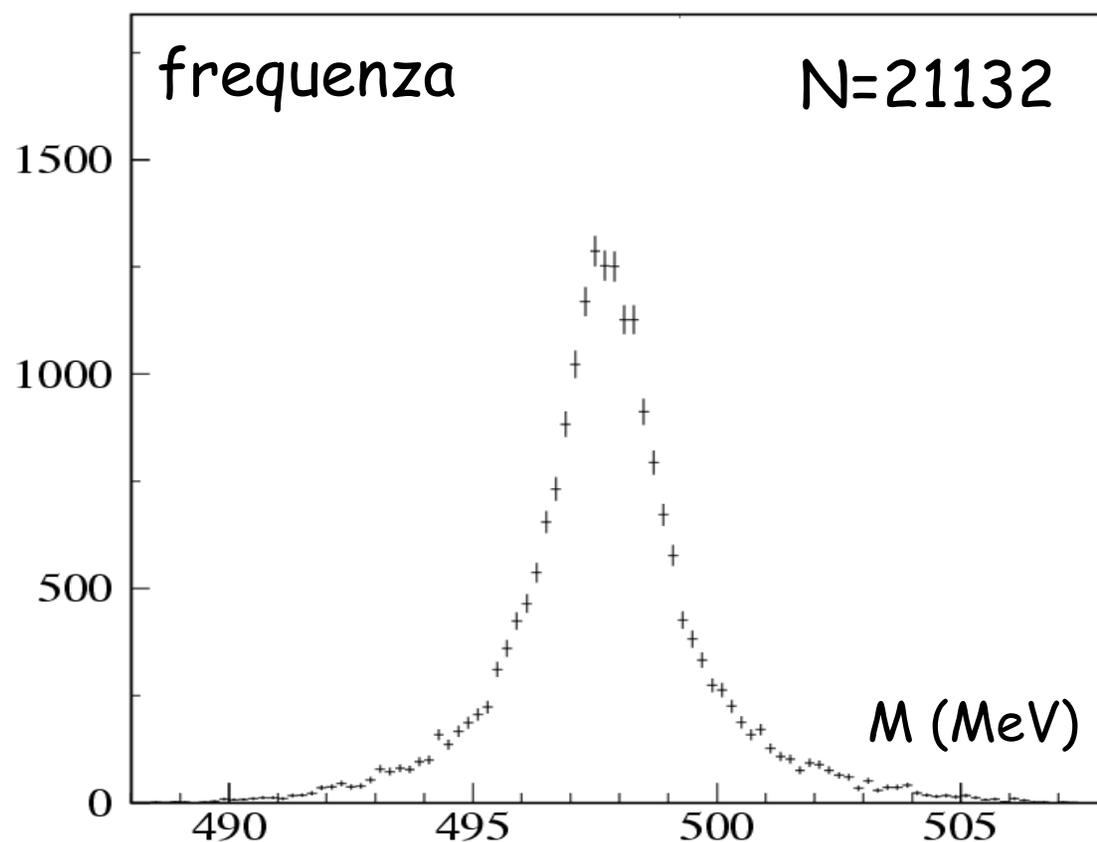
Misura spessore cavo elettrico



- Errori casuali
- Errori sistematici

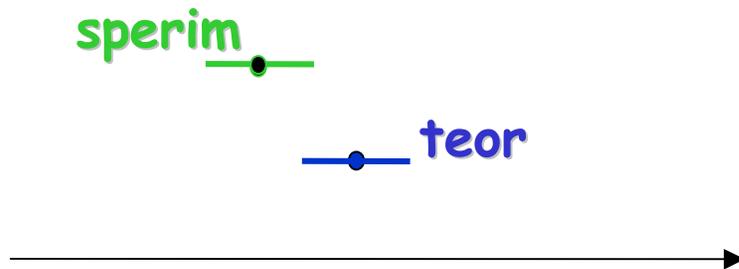
*una cosiddetta
misura 'difficile' ...*

Misura massa K_L



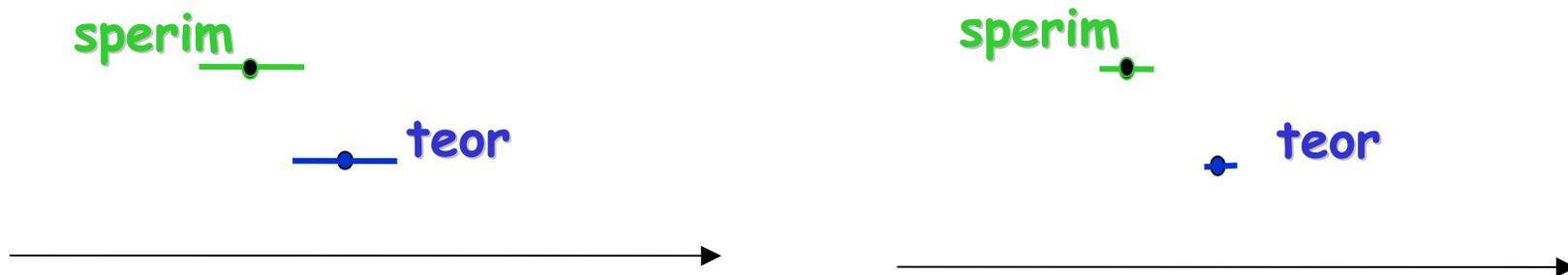
*il risultato di una
operazione di misura ... e' una variabile aleatoria !*

- Le incertezze (sperimentali e/o teoriche) possono essere diminuite ;



*il risultato di una
operazione di misura ... e' una variabile aleatoria !*

- Le incertezze (sperimentali e/o teoriche) possono essere diminuite ;
- La situazione puo' cambiare nel tempo...



2

Variabile aleatorie e funzioni di distribuzione

Indicatori fondamentali

Valor medio

$$m = \frac{\sum x_i}{N}$$

Deviazione standard

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (m - x_i)^2}{N - 1}}$$

$$x = m \pm \sigma$$

$$e_x = \sigma / m$$

Indicatori fondamentali

Valor medio

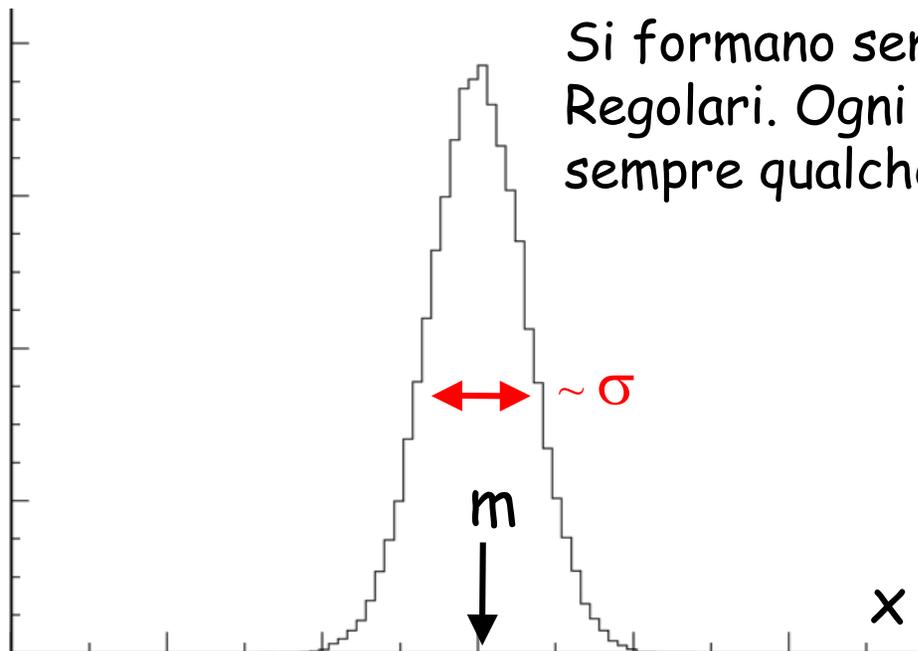
$$m = \frac{\sum x_i}{N}$$

$$x = m \pm \sigma$$

$$e_x = \sigma/m$$

Deviazione standard

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (m - x_i)^2}{N - 1}}$$



Si formano sempre istogrammi
Regolari. Ogni istogramma segue
sempre qualche *funzione di distribuzione*

Tipi di variabili aleatorie (I)

VA : gaussiana

Misura di una grandezza
'ben definita', in presenza di
errori casuali.



spessore cavo elettrico

massa di una particella

misura di un intervallo di tempo

Tipi di variabili aleatorie (I)

VA : gaussiana

Misura di una grandezza
'ben definita', in presenza di
errori casuali.



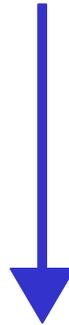
spessore cavo elettrico

massa di una particella

misura di un intervallo di tempo

VA : binomiale

Il numero di **successi** in
N prove e' una variabile
aleatoria, e ovviamente:
 $0 \leq k \leq N$.



risultato lancio di un dado

efficienza rivelatore

canale di decadimento per una particella

Tipi di variabili aleatorie (I)

VA : gaussiana

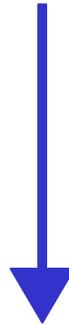
Misura di una grandezza 'ben definita', in presenza di **errori casuali**.



spessore cavo elettrico
massa di una particella
misura di un intervallo di tempo

VA : binomiale

Il numero di **successi** in N prove e' una variabile aleatoria, e ovviamente:
 $0 \leq k \leq N$.



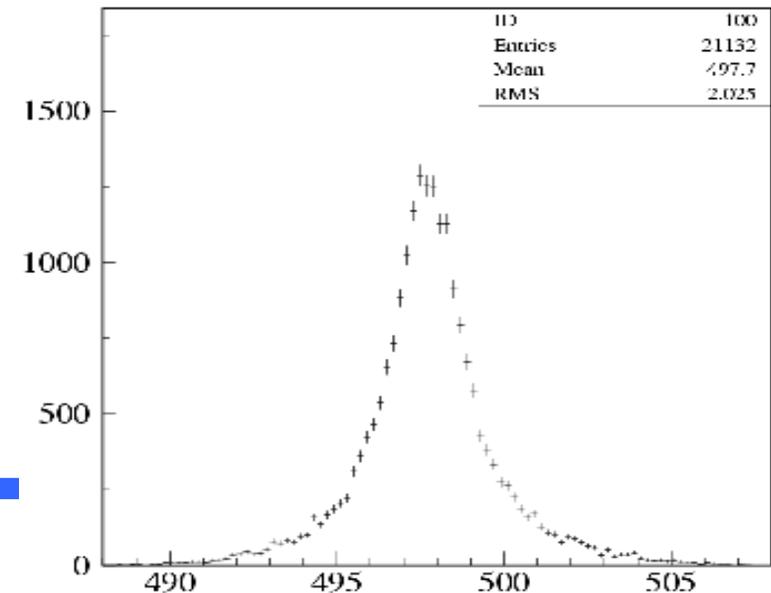
risultato lancio di un dado
efficienza rivelatore
canale di decadimento per una particella

VA : poissoniana

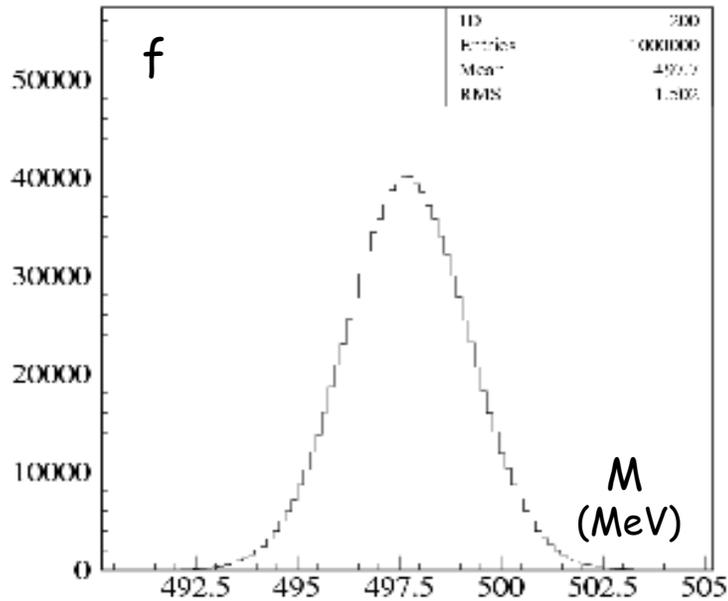
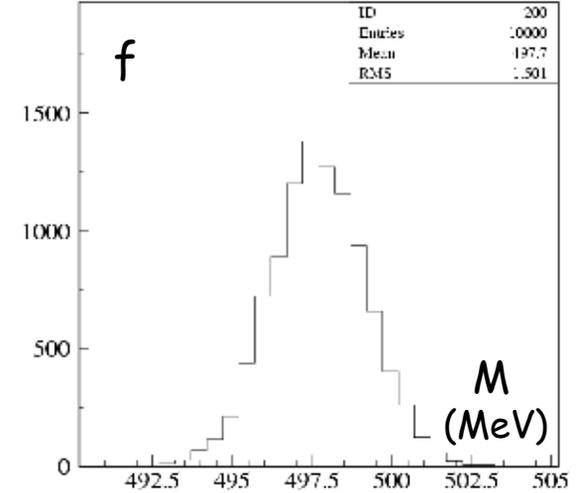
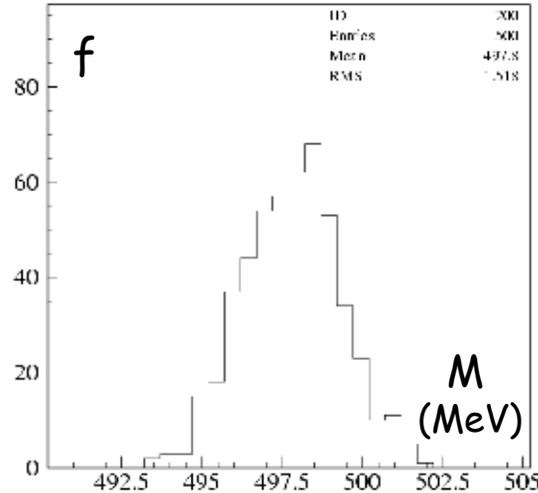
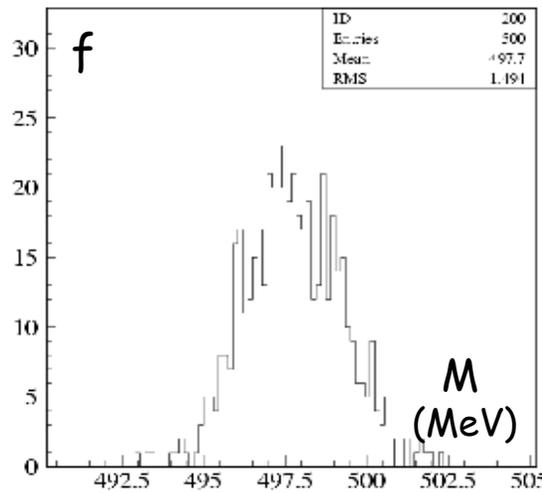
Caso particolare di var.binom.:
- *successo: evento raro*, $p \approx 0$
- numero **infinito** di prove $N \approx \infty$



nascite al mese
decadimenti in 5 s di una sostanza radioattiva
di eventi in un "bin" di un istogramma

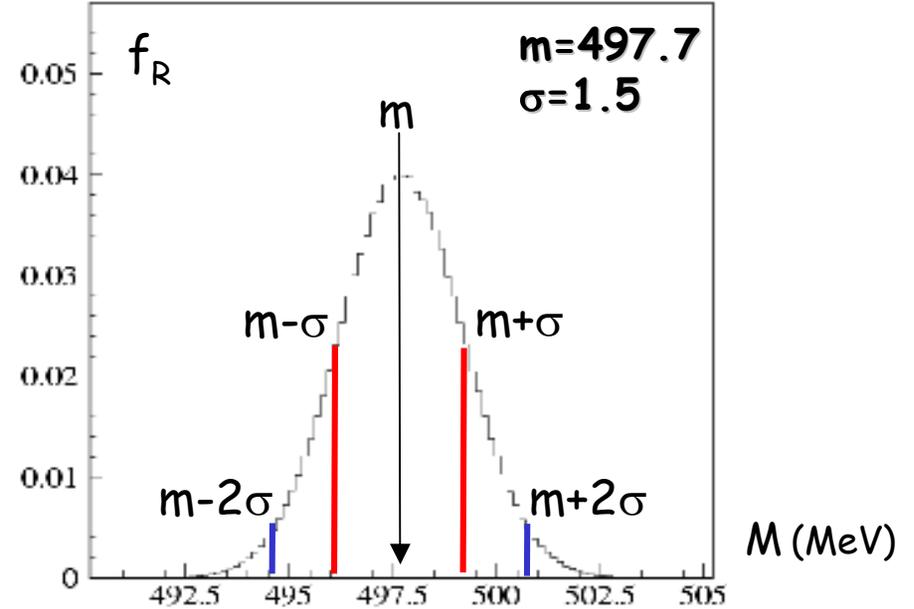
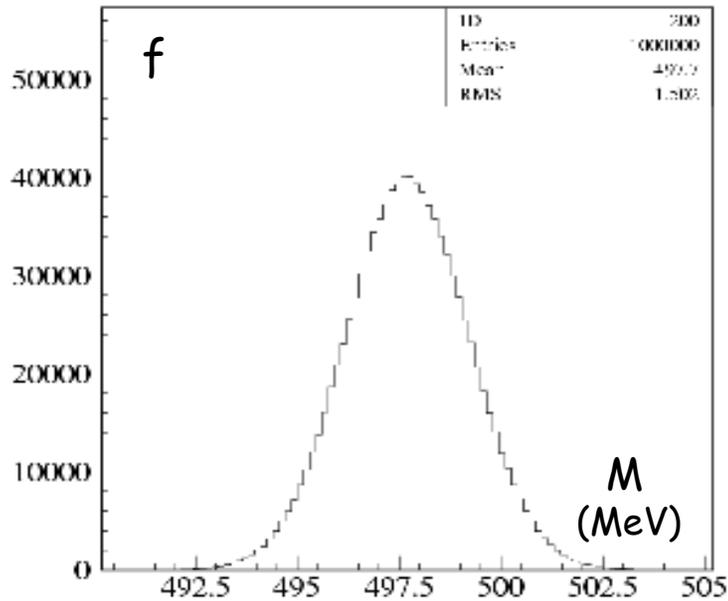
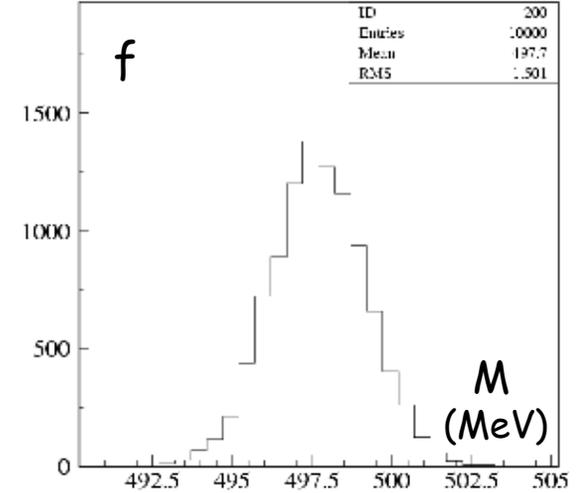
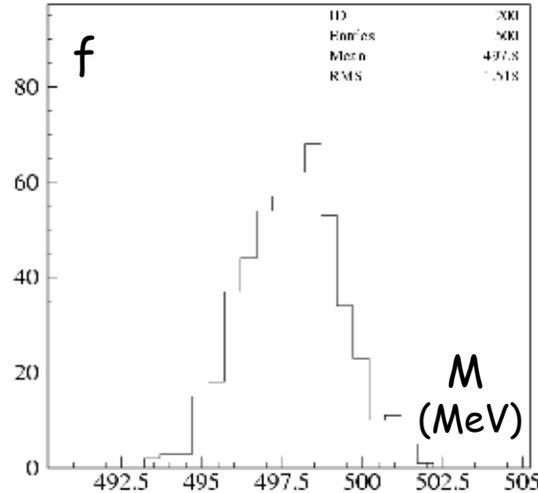
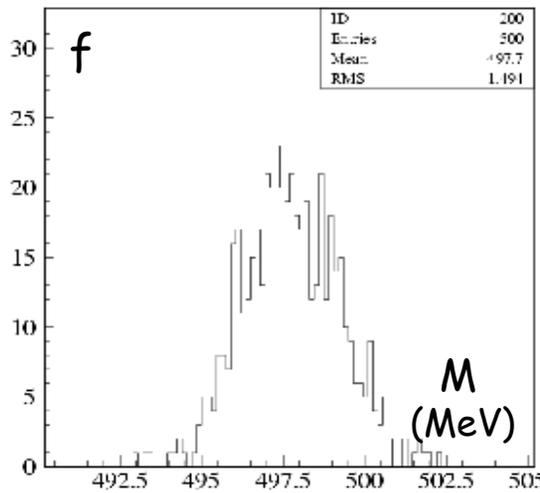


Misura massa particella ... **fdd gaussiana**

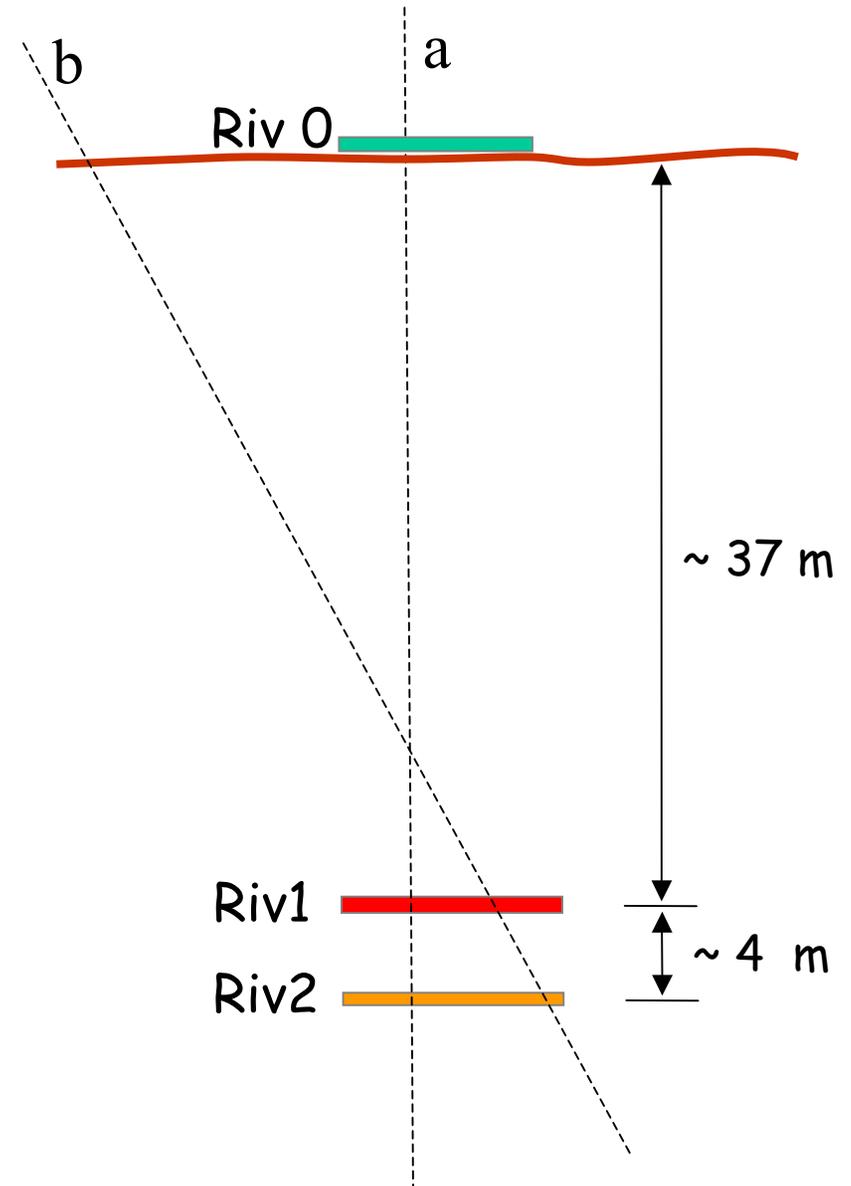
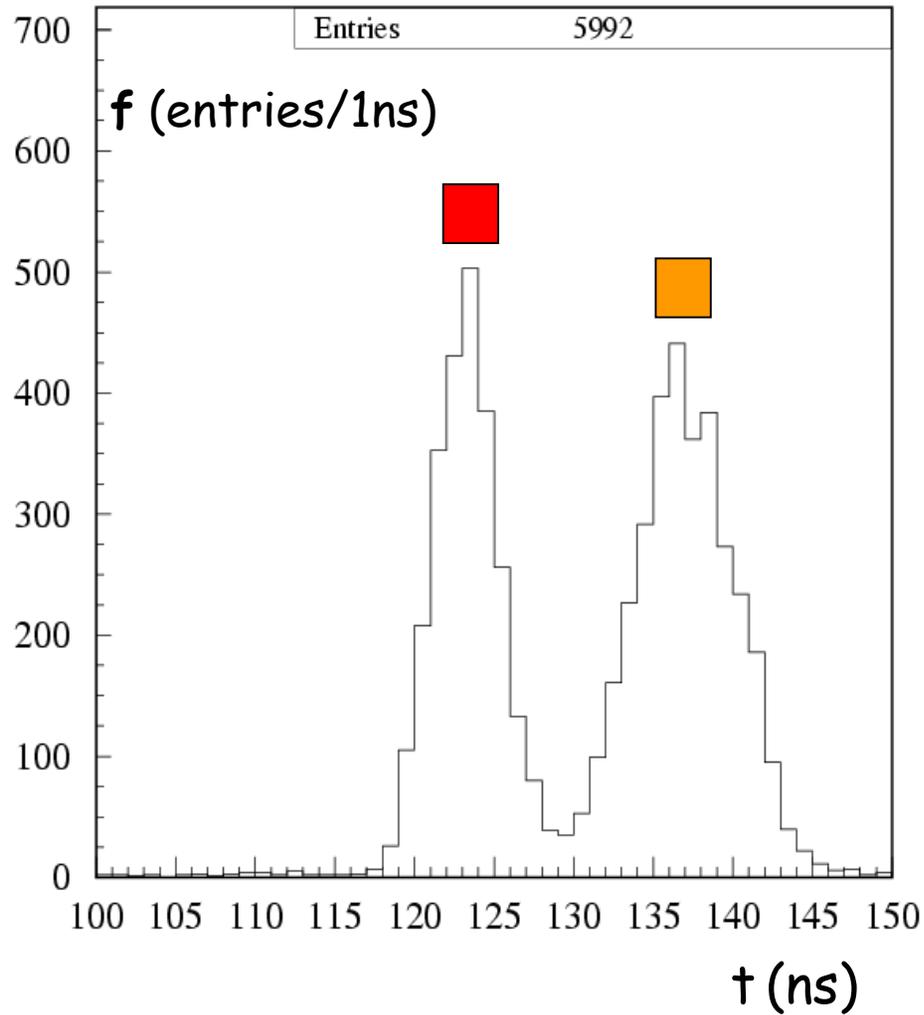


Misura massa particella ...

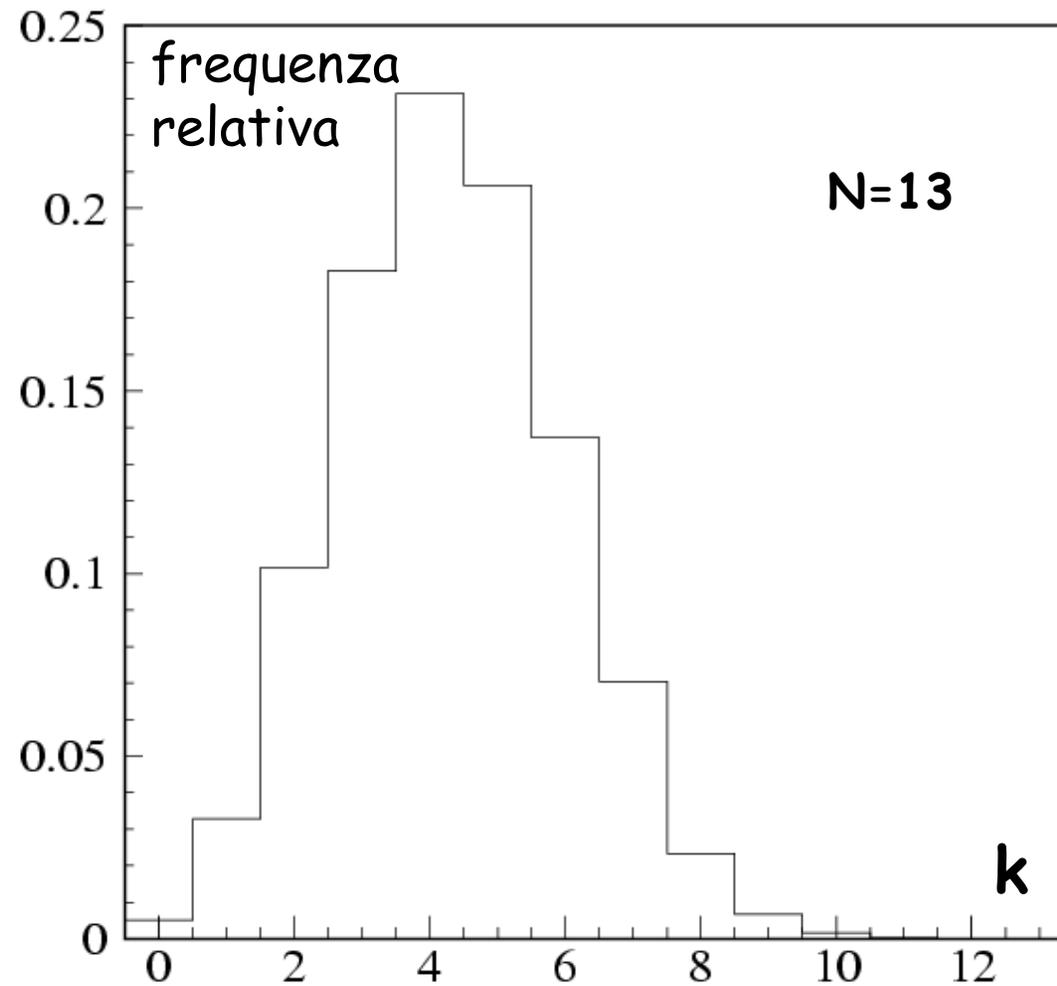
fdd gaussiana



Misure temporali



fdd binomiale



I conteggi

N = # decadimenti totali della particella Z_0

K = # decadimenti del tipo : $Z_0 \rightarrow e^+e^-$

$BR = k/N$ è una **VA binomiale**

$$m = pN$$

$$\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$$

$$\frac{\sigma}{m} = \frac{\sqrt{Np(1-p)}}{pN} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}$$

- **Precisione misura BR**

$$N=50 \quad \rightarrow \quad \sigma/m \quad \rightarrow \quad 10\%$$

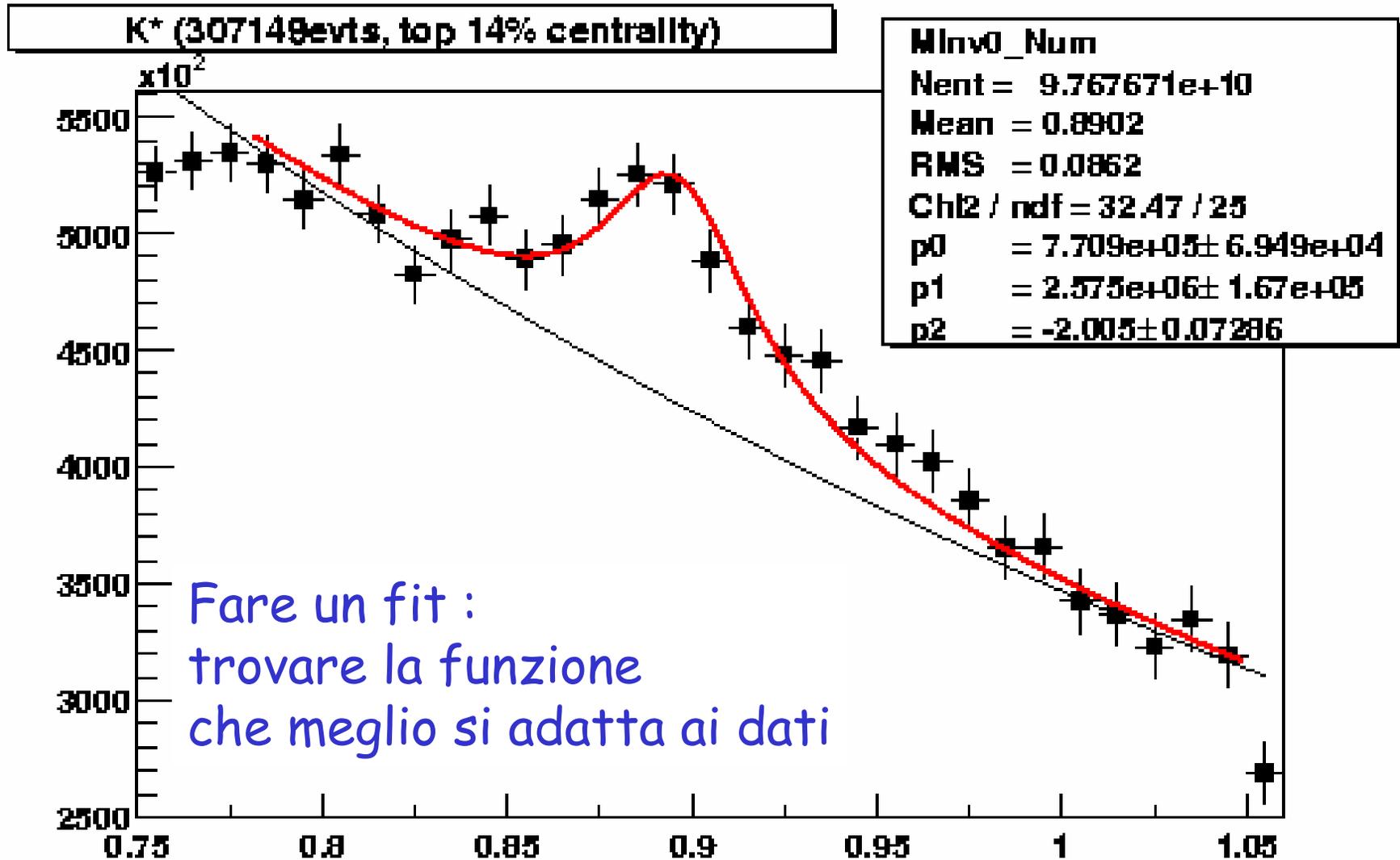
$$N=10^3 \quad \rightarrow \quad \sigma/m \quad \rightarrow \quad 2.4\%$$

$$N=10^6 \quad \rightarrow \quad \sigma/m \quad \rightarrow \quad 0.08\%$$

3

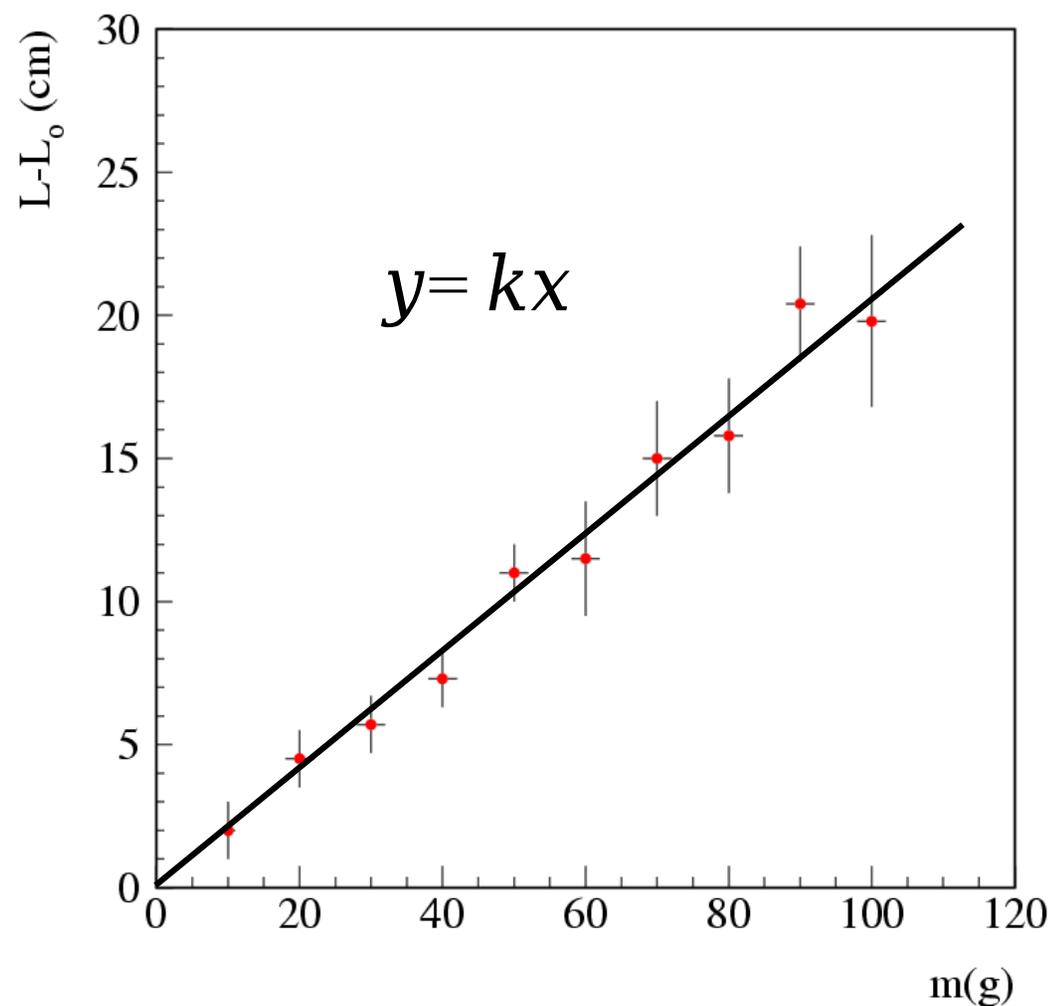
Curva di accostamento (Fit)

*relazione matematica=legge fisica=grafico :
i valori sperimentali si adattano ad esso ?*



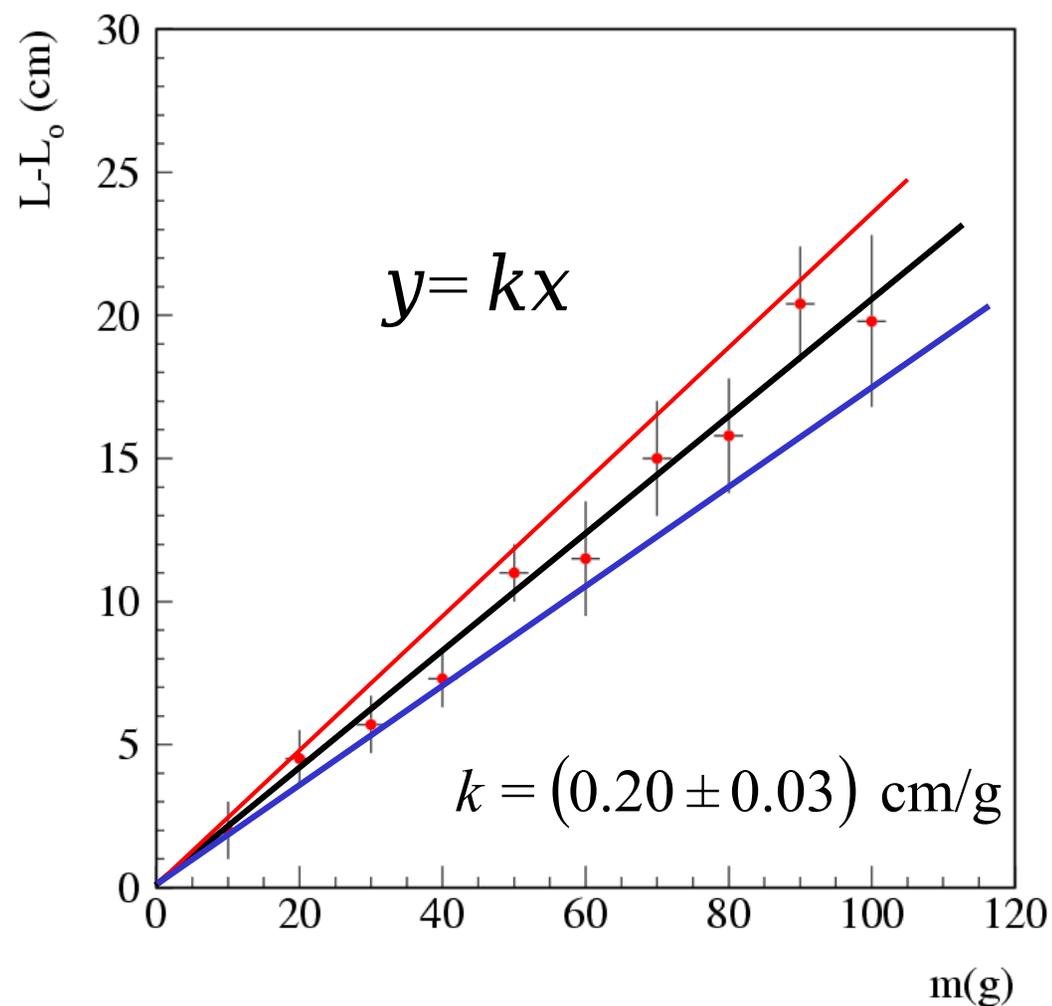
*A scuola si fa a
mano ...*

Allungamento di una molla (I)



*A scuola si fa a
mano ...*

Allungamento di una molla (I)

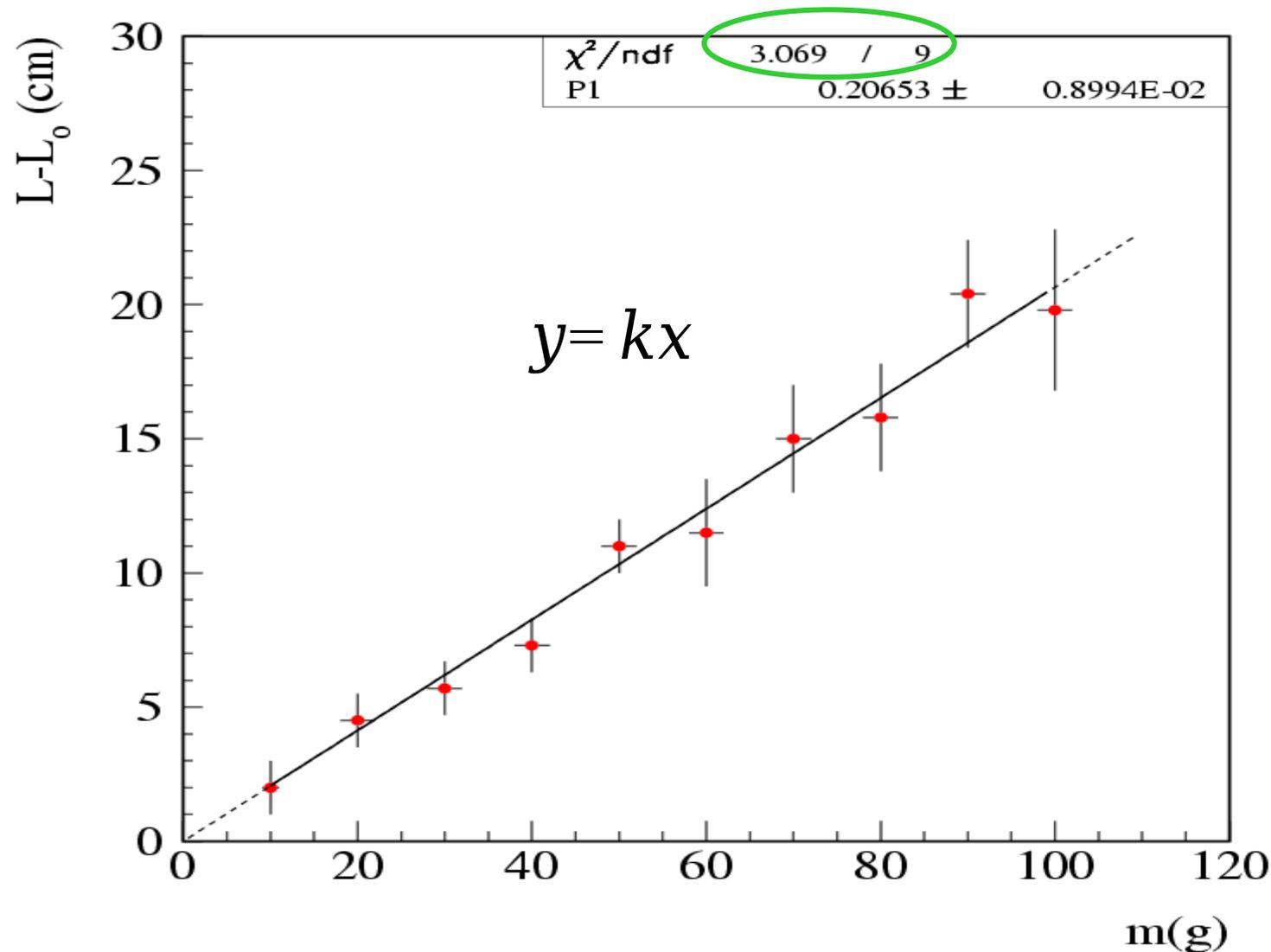


Ma esistono vari
programmini ...

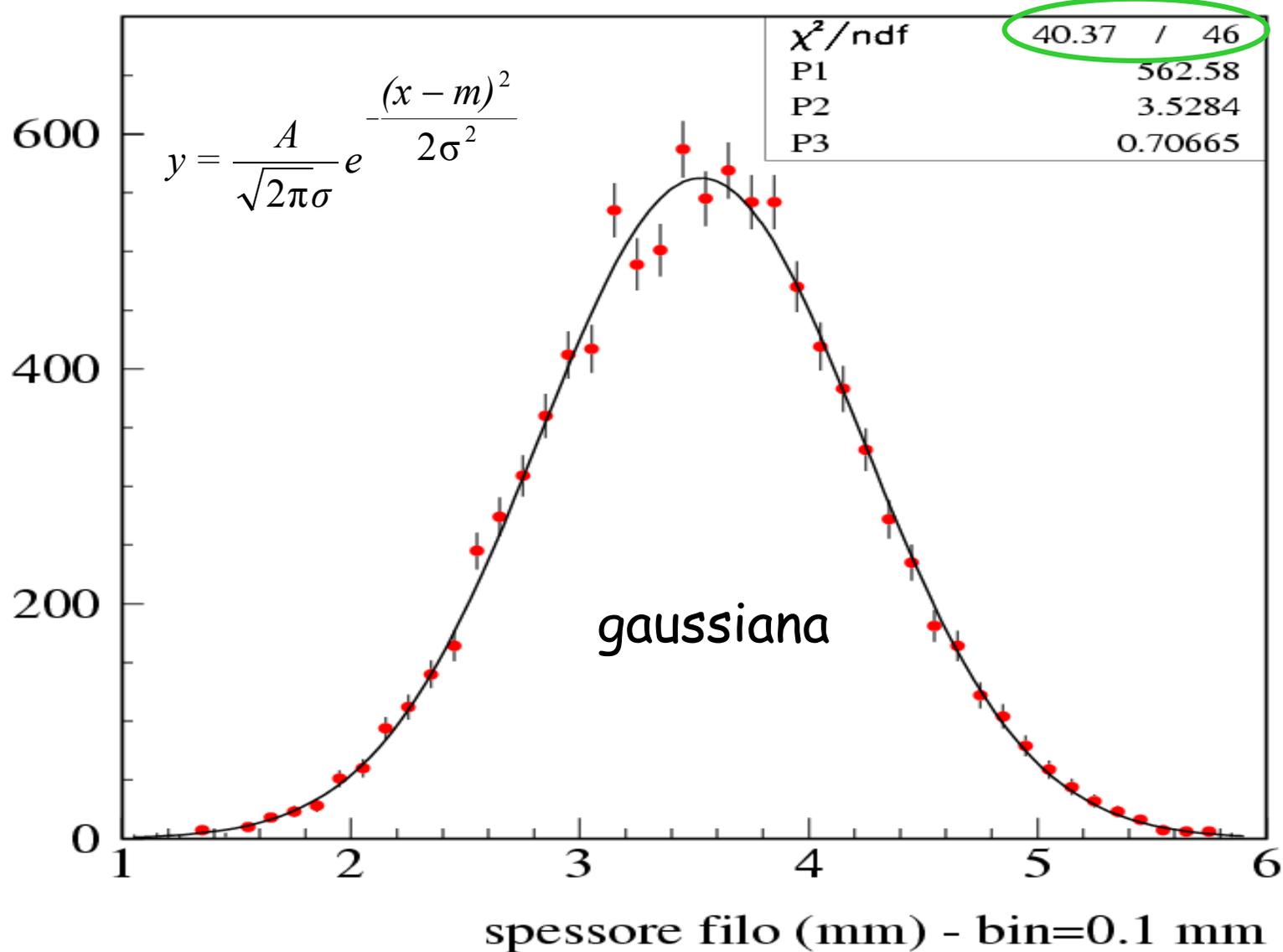
PAW

Root

Allungamento di una molla (II)

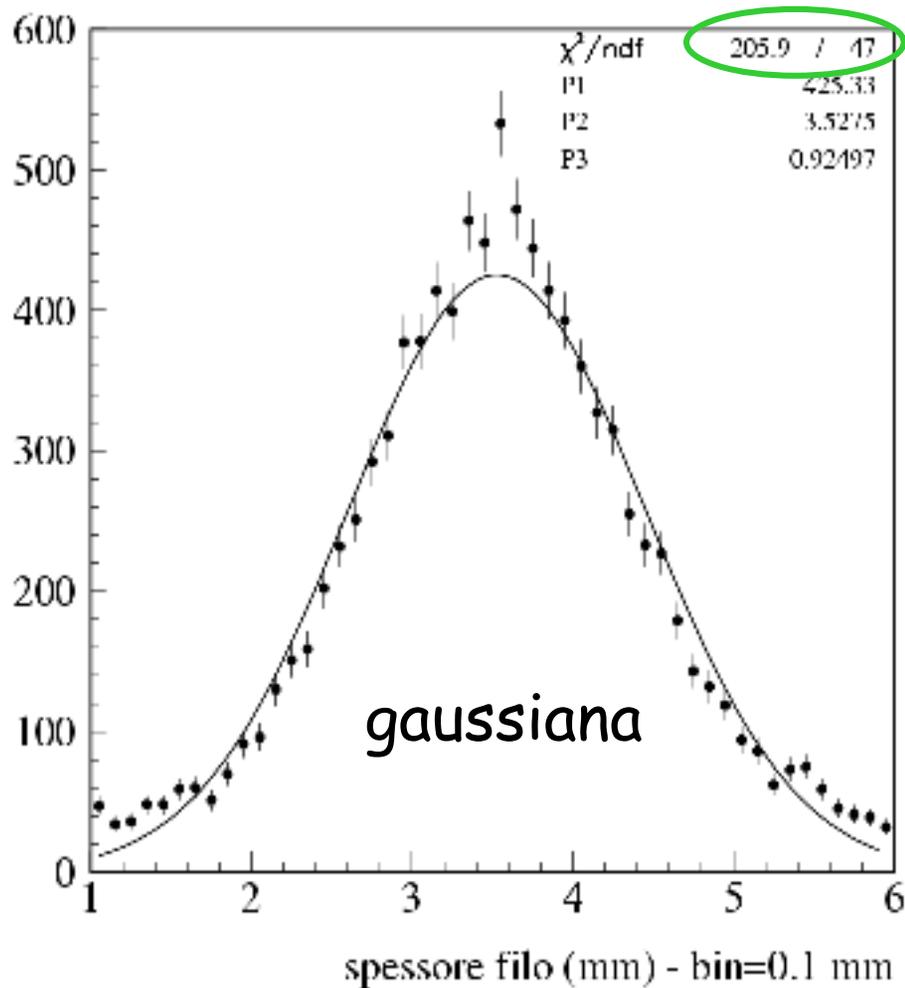


Spessore di un cavo elettrico (I)



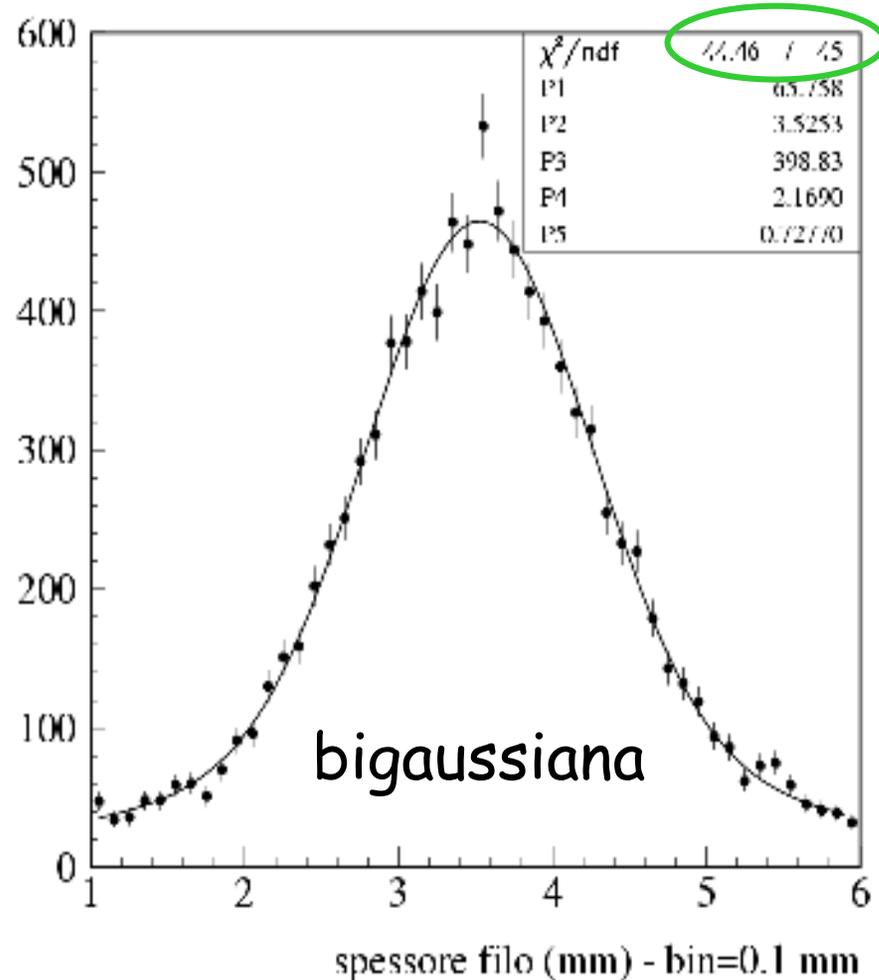
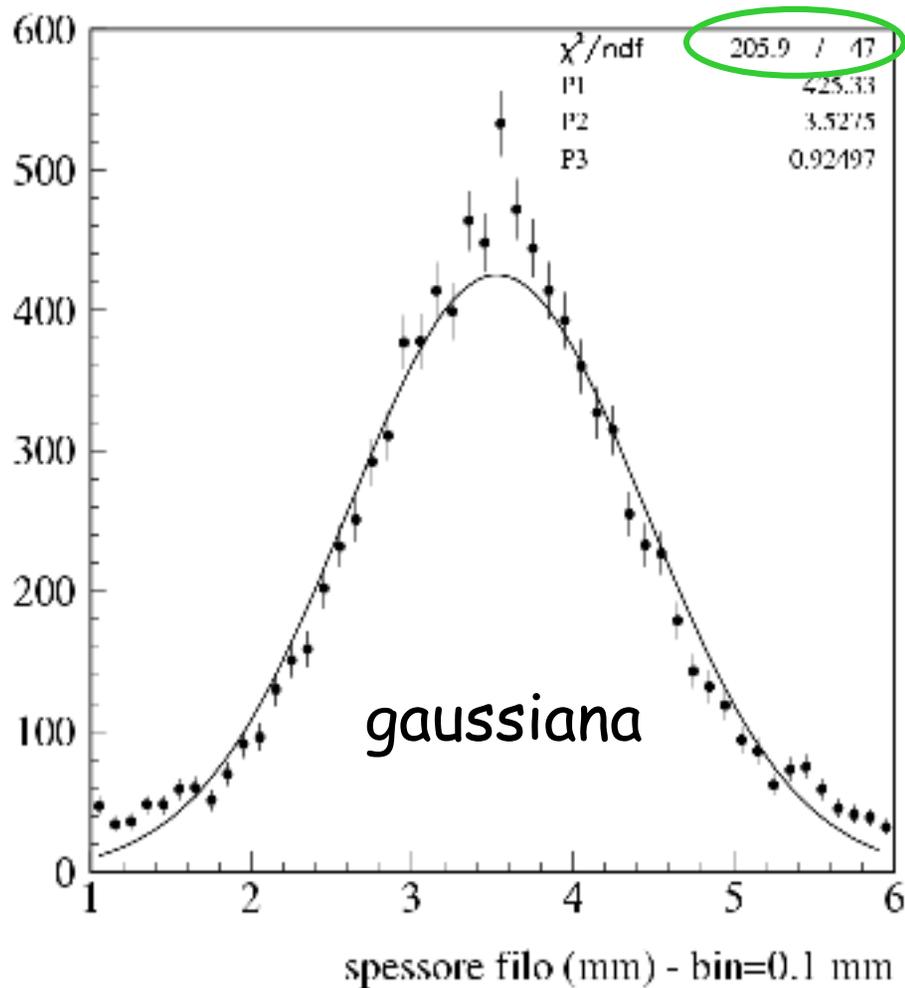
Errori casuali da
due sorgenti ...

Spessore di un cavo elettrico (II)



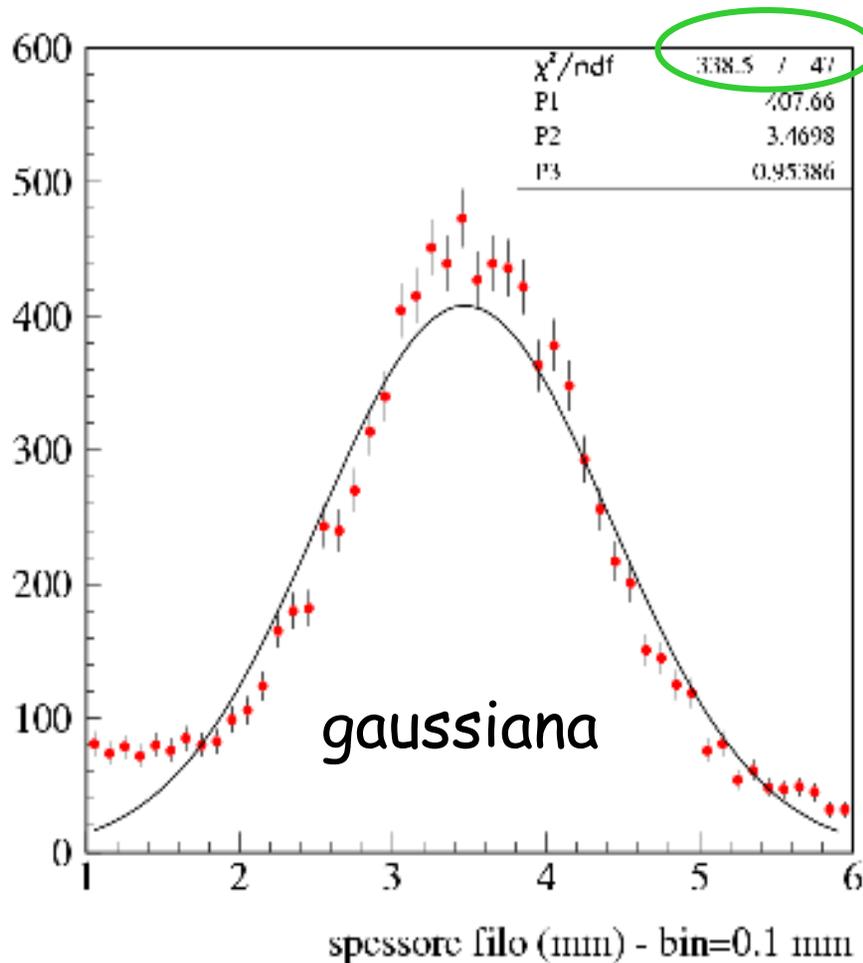
Errori casuali da
due sorgenti ...

Spessore di un cavo elettrico (II)



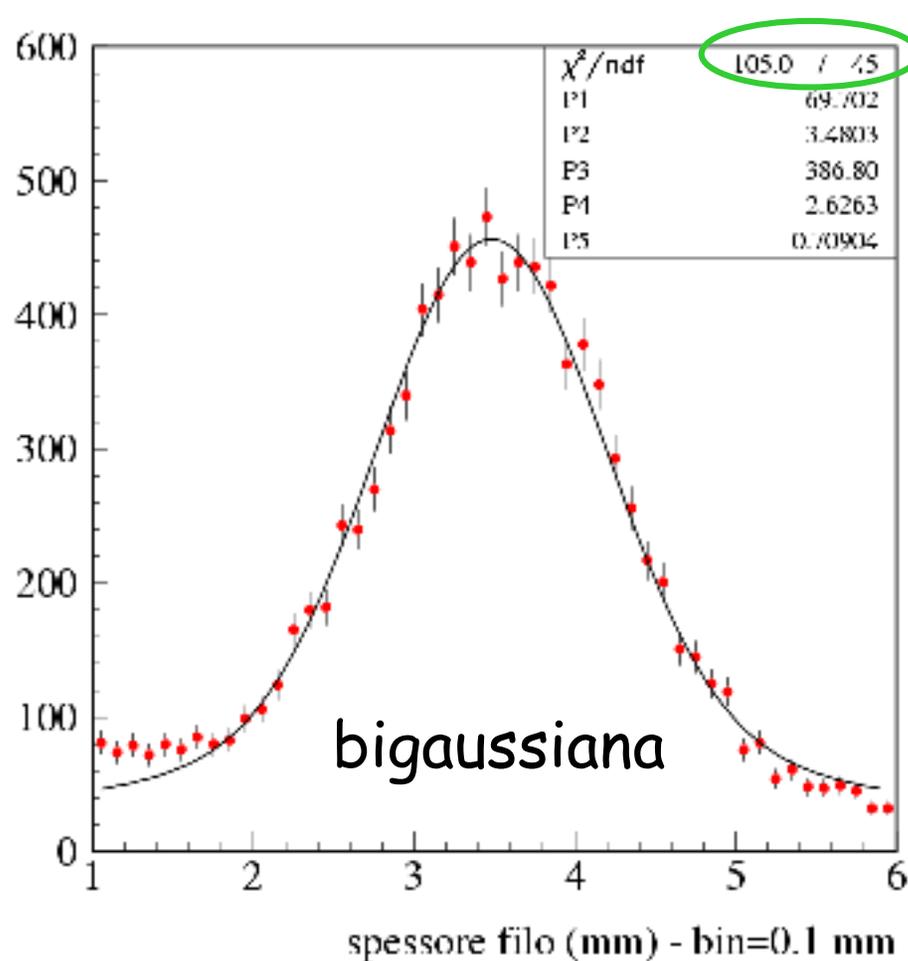
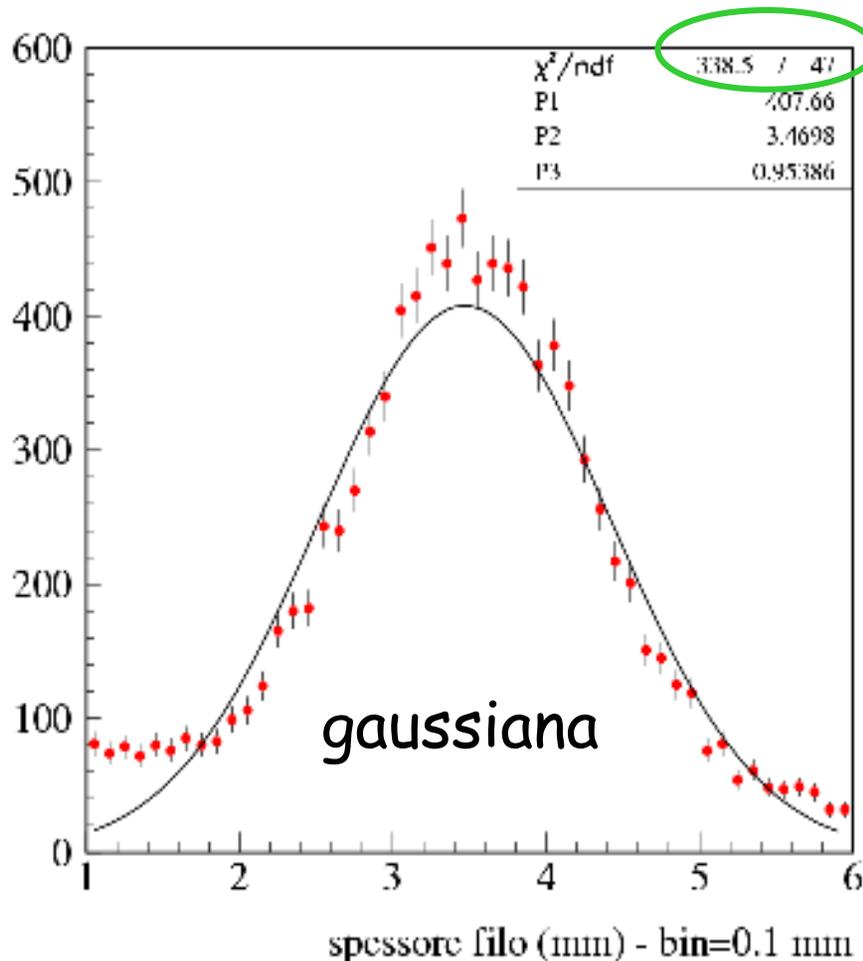
*Disturbo di tipo
non casuale, e dunque
non gaussiano, ne'
bigaussiano ...*

Spessore di un cavo elettrico (III)



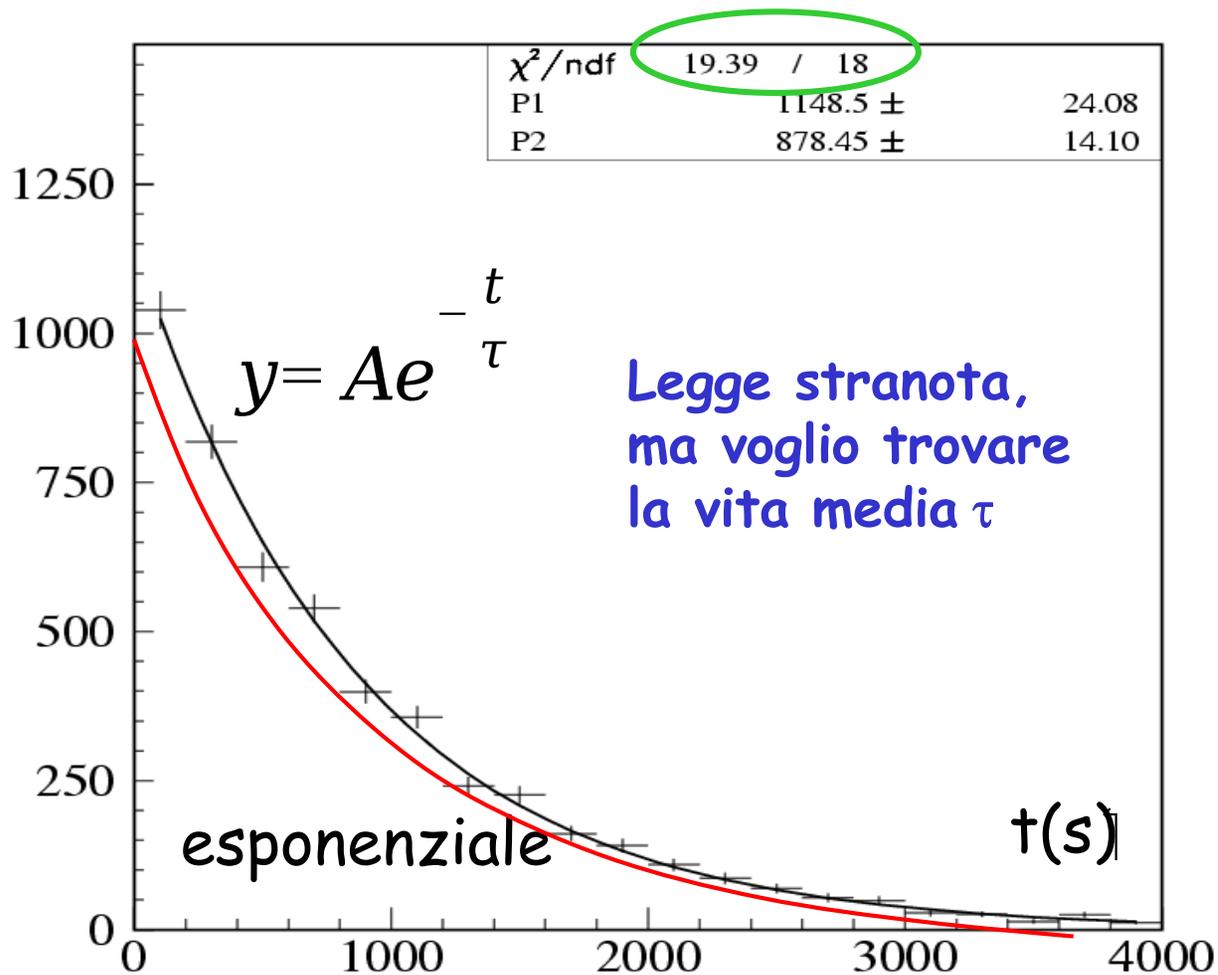
*Disturbo di tipo
non casuale, e dunque
non gaussiano, ne'
bigaussiano ...*

Spessore di un cavo elettrico (III)



Un fit non e' fatto
sempre per verificare
l'adattamento, ma per
trovare qualche
parametro ...

Misura vita media



Quale e' il criterio per dire che un fit e' OK ?

- Se il fenomeno in studio e' ben noto, la funzione $y = f(x; \alpha, \beta)$ e' gia' decisa. Lo scopo del *fit* e' allora di determinare i valori dei parametri (α e β in questo caso) che corrispondono al miglior adattamento della curva ai dati sperimentali.

Quale e' il criterio per dire che un fit e' OK ?

- Se il fenomeno in studio e' ben noto, la funzione $y = f(x; \alpha, \beta)$ e' gia' decisa. Lo scopo del *fit* e' allora di determinare i valori dei parametri (α e β in questo caso) che corrispondono al miglior adattamento della curva ai dati sperimentali.
- I valori che corrispondono al miglior adattamento sono quelli che rendono minima la quantita' seguente :

$$\frac{\chi^2}{N-2} = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - f(x_i; \alpha, \beta)}{\sigma_i} \right)^2}{N-2}$$

Quale e' il criterio per dire che un fit e' OK ?

• Se il fenomeno in studio e' ben noto, la funzione $y = f(x; \alpha, \beta)$ e' gia' decisa. Lo scopo del *fit* e' allora di determinare i valori dei parametri (α e β in questo caso) che corrispondono al miglior adattamento della curva ai dati sperimentali.

• I valori che corrispondono al miglior adattamento sono quelli che rendono minima la quantita' seguente :

valore sperimentale

valore teorico

Van der Waals

$$\frac{\chi^2}{N-2} = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - f(x_i; \alpha, \beta)}{\sigma_i} \right)^2}{N-2}$$

$\sim 1 \rightarrow \text{O.K. !}$

$> 1 \rightarrow \text{K.O. !}$

4

La propagazione degli errori

*Misure indirette,
ovvero grandezze
calcolate ...*

Le misure indirette

$$V = V_2 - V_1$$

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

Misure indirette,
ovvero grandezze
calcolate ...

Le misure indirette

$$V = V_2 - V_1$$

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

visione pessimistica :

$$\Delta V = \Delta V_2 + \Delta V_1$$

$$0,2 + 0,2 = 0,4$$

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta G}{G} + \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{\Delta r}{r}$$

Misure indirette,
ovvero grandezze
calcolate ...

Le misure indirette

$$V = V_2 - V_1$$

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

visione pessimistica :

$$\Delta V = \Delta V_2 + \Delta V_1$$

$$0,2 + 0,2 = 0,4$$

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta G}{G} + \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{\Delta r}{r}$$

visione realistica :

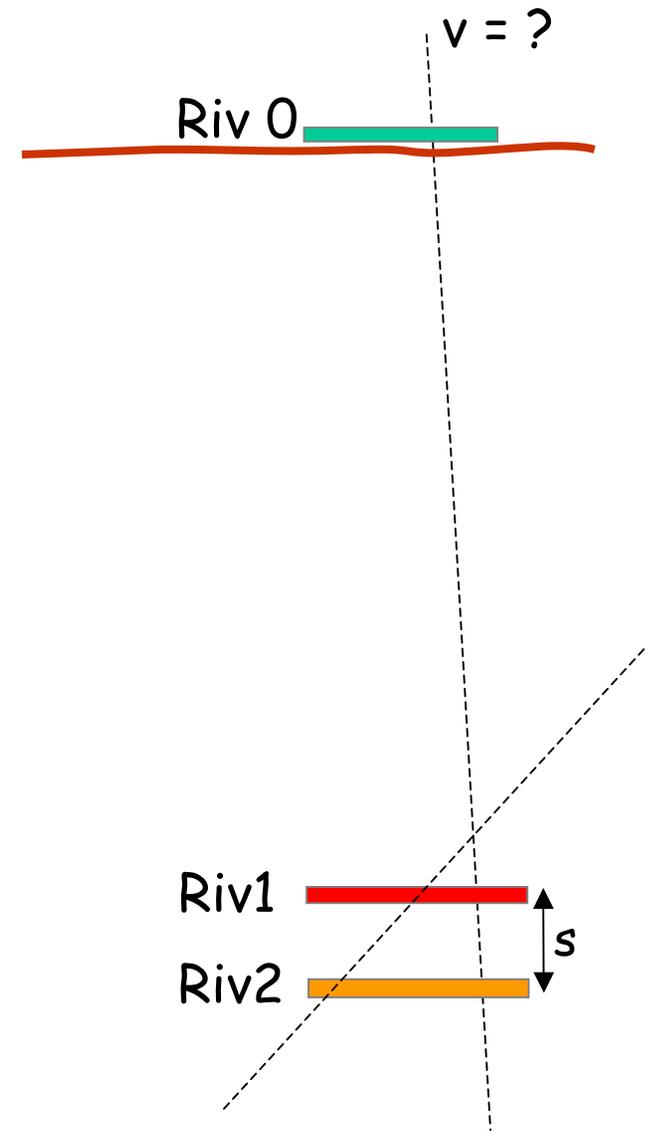
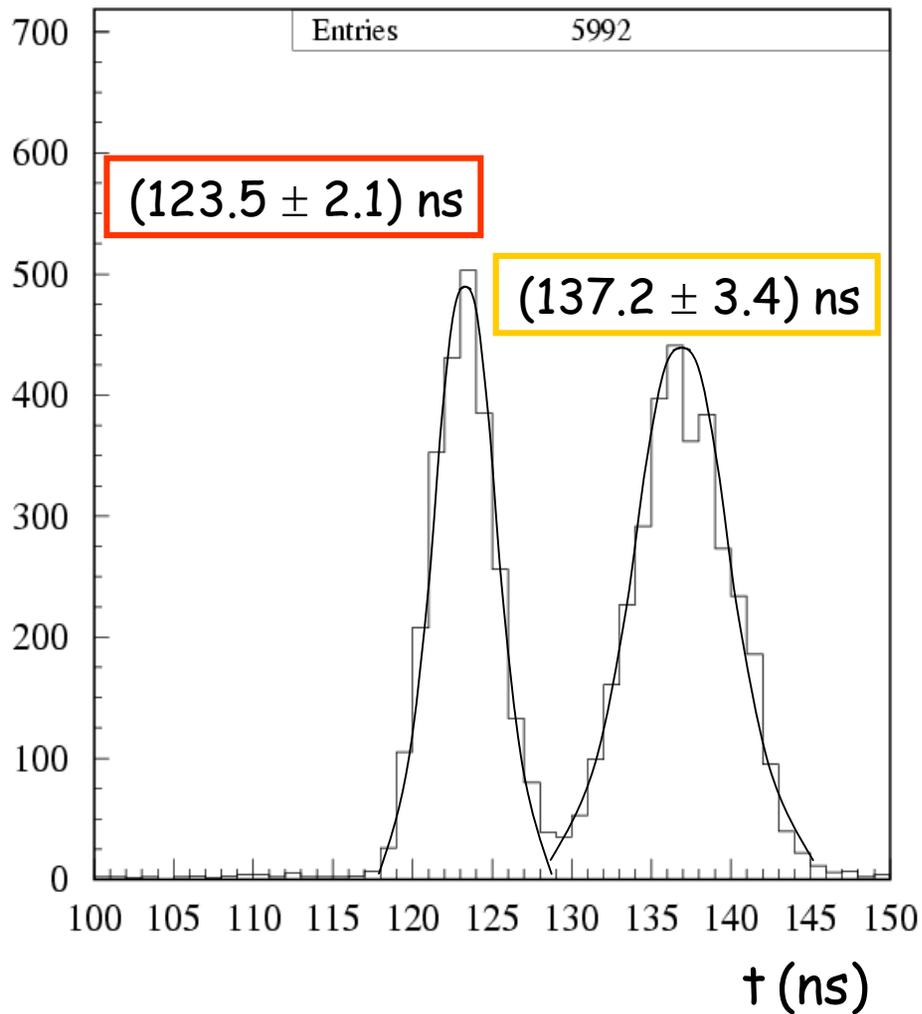
$$\Delta V = \sqrt{\Delta V_1^2 + \Delta V_2^2}$$

$$\sqrt{0,2^2 + 0,2^2} = 0,28$$

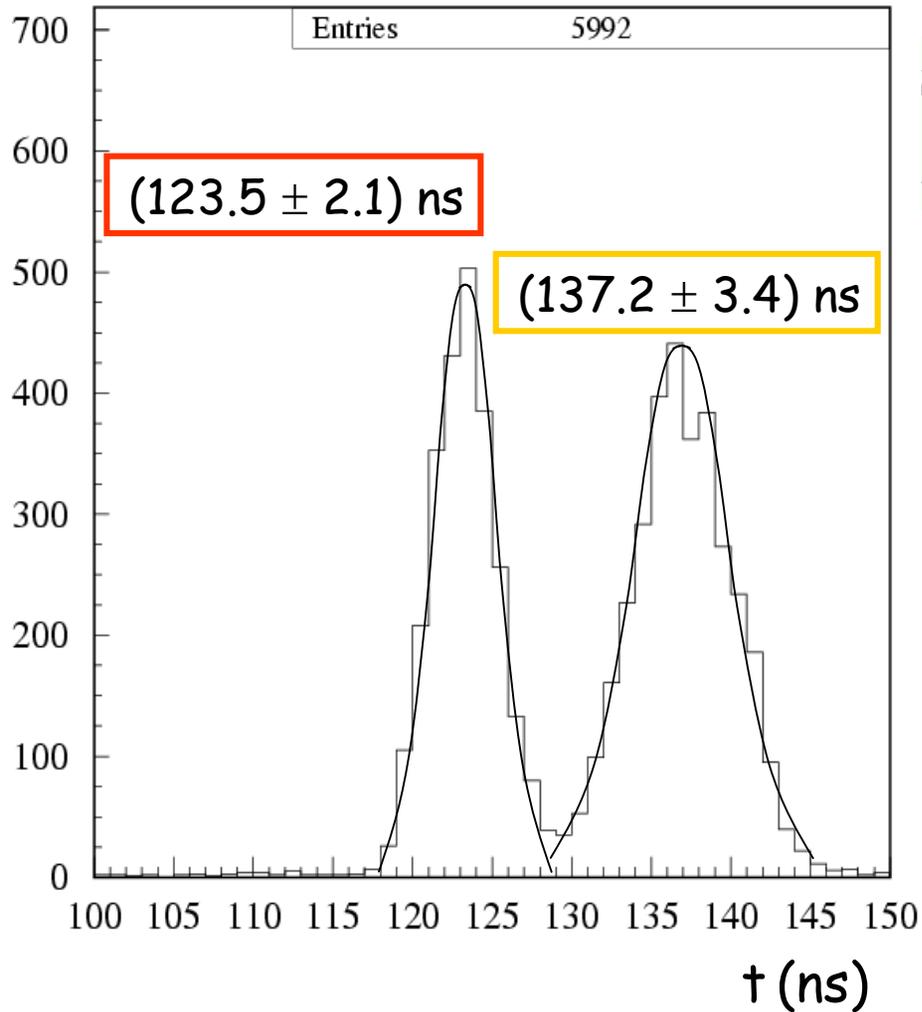
$$\left(\frac{\Delta F}{F}\right) = \sqrt{\left(\frac{\Delta G}{G}\right)^2 + \left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta r}{r}\right)^2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a \oplus b$$

Esempio 1 (misura velocità raggi cosmici)

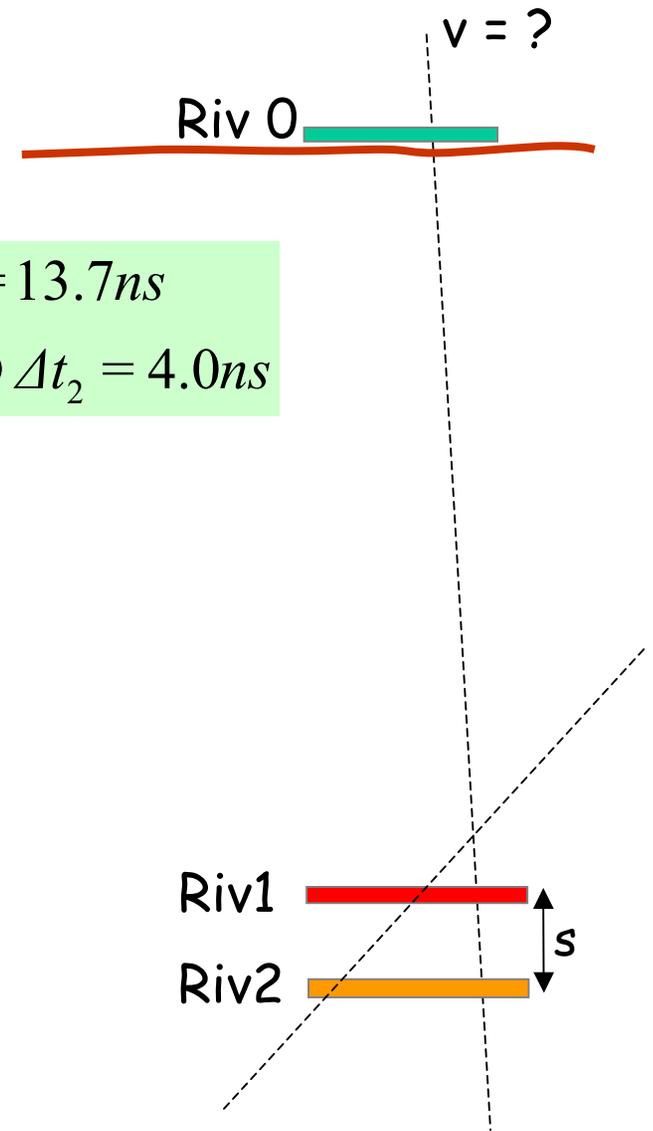


Esempio 1 (misura velocità raggi cosmici)

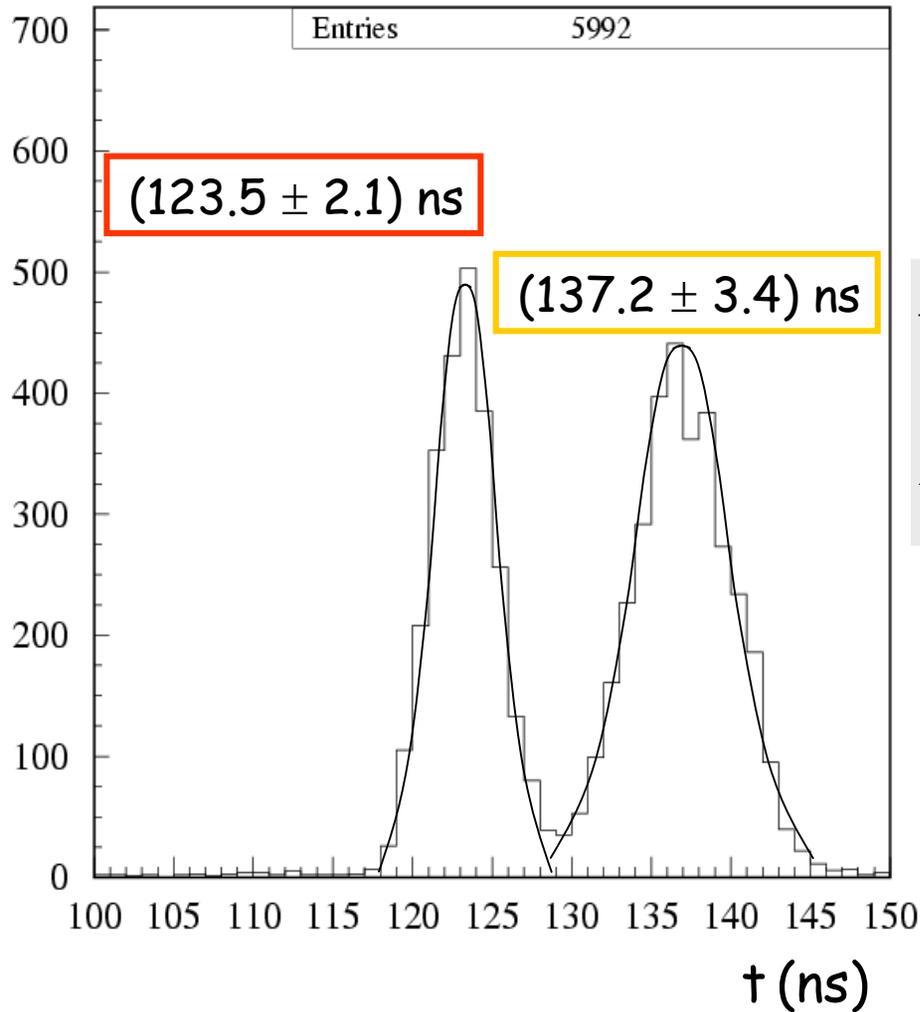


$$t_{12} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = 13.7 \text{ ns}$$

$$\Delta t_{12} = \Delta t_1 \oplus \Delta t_2 = 4.0 \text{ ns}$$



Esempio 1 (misura velocità raggi cosmici)



$$t_{12} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = 13.7 \text{ ns}$$

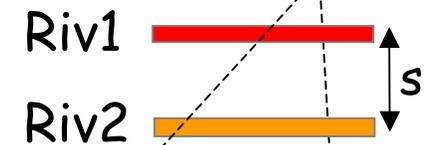
$$\Delta t_{12} = \Delta t_1 \oplus \Delta t_2 = 4.0 \text{ ns}$$

$$v = \frac{s}{t_{12}} = \frac{3.8 \text{ m}}{13.7 \times 10^{-9} \text{ s}} = 2.77 \times 10^8 \text{ m/s}$$

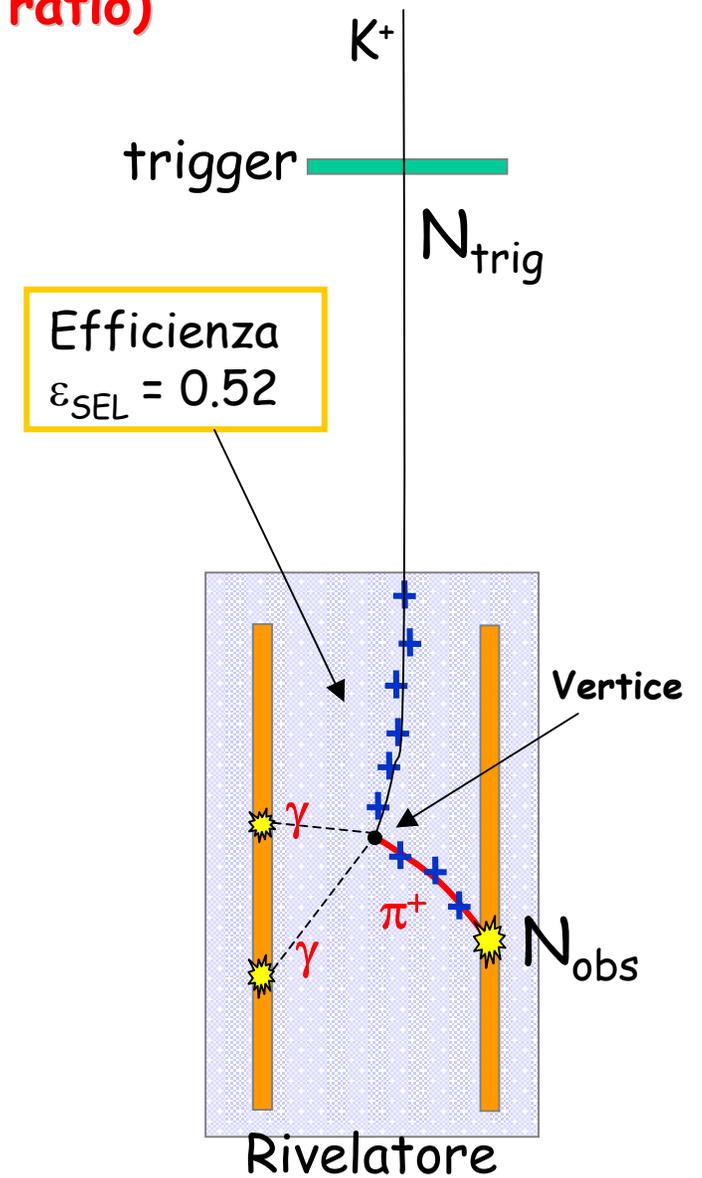
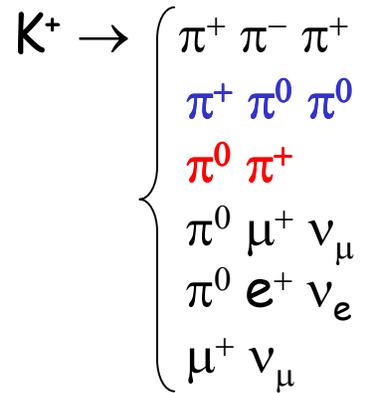
$$\Delta v = v \left(\frac{\Delta s}{s} \oplus \frac{\Delta t_{12}}{t_{12}} \right) = 0.83 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$\sim 2\%$

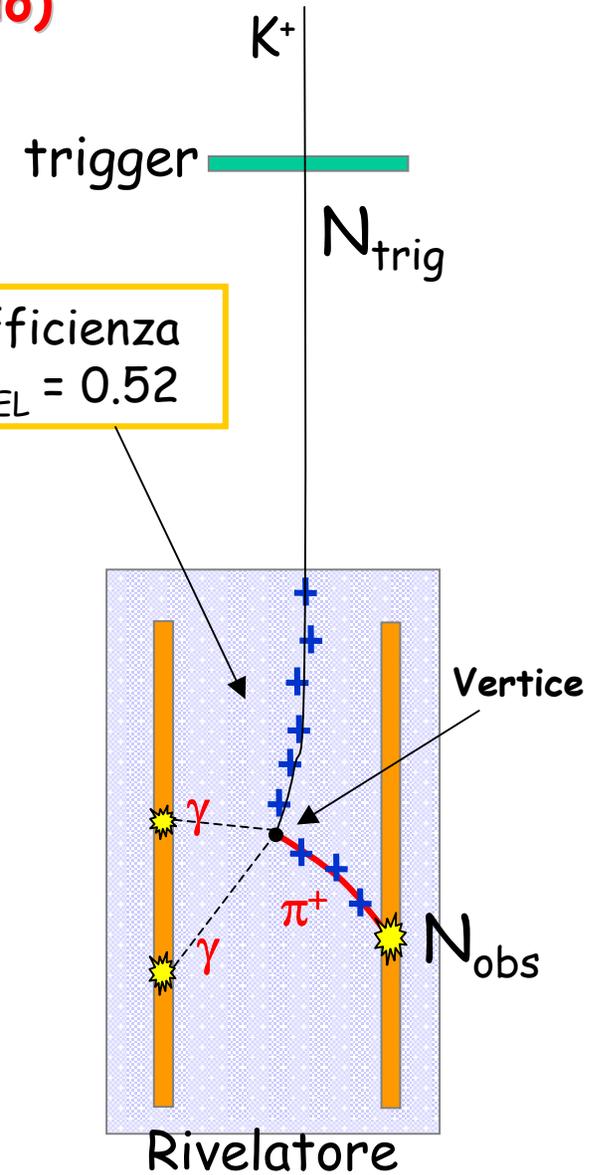
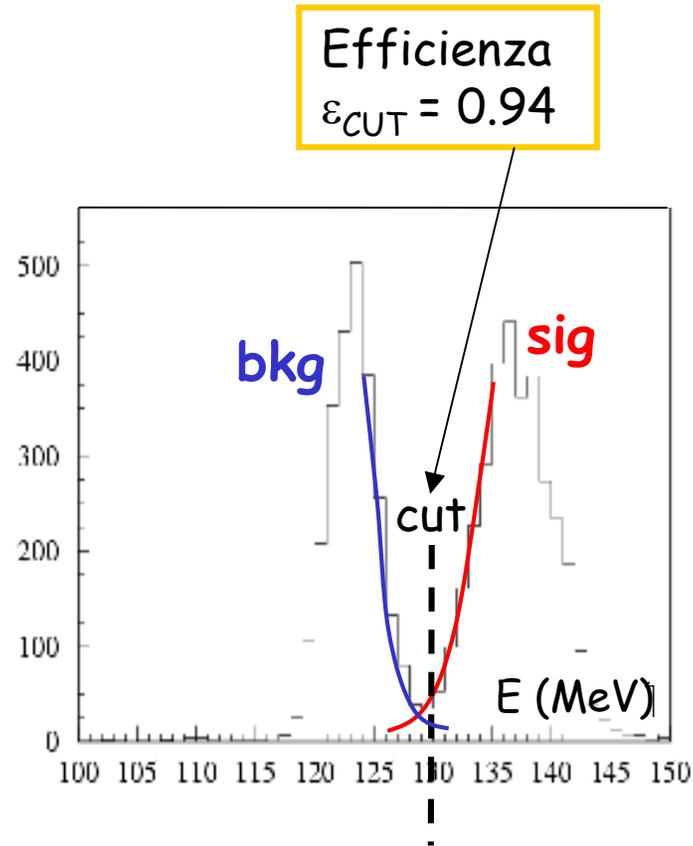
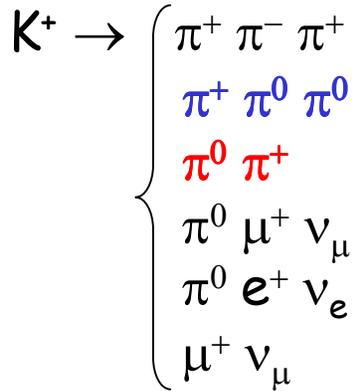
$\sim 30\%$



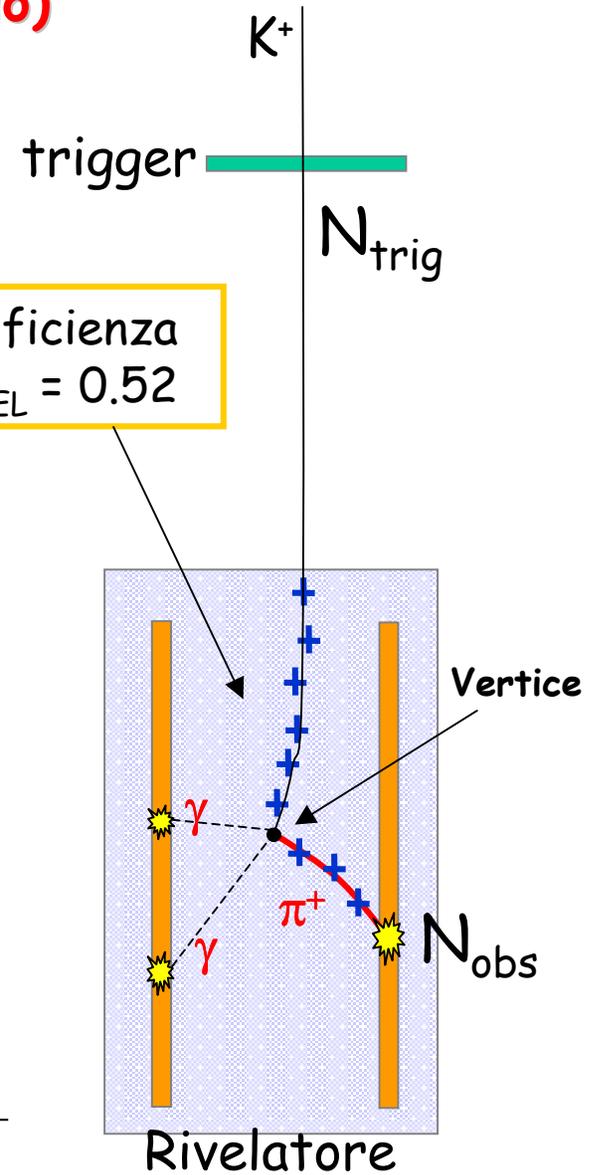
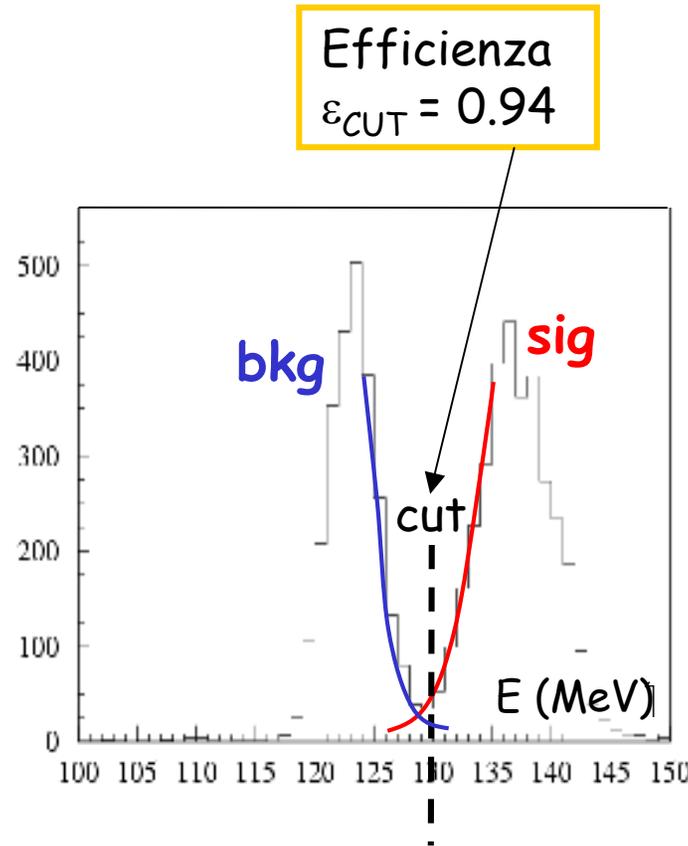
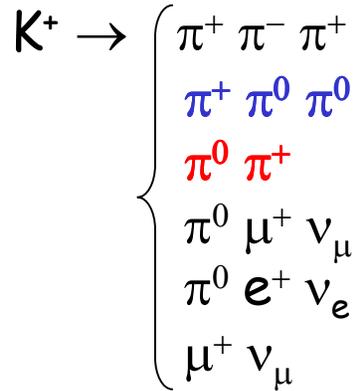
Esempio 2 (branching ratio)



Esempio 2 (branching ratio)



Esempio 2 (branching ratio)



$$BR(K^+ \rightarrow \pi^0 \pi^+) = \frac{N_{SIG}}{N_{trig}} = \frac{(N_{OBS} - N_{BKG})}{N_{trig}} = \frac{\epsilon_{SEL} \epsilon_{CUT}}{N_{trig}} = \frac{(N_{OBS} - N_{BKG})}{N_{trig} \cdot \epsilon_{SEL} \cdot \epsilon_{CUT}}$$

5

Combinazione di misure

Scrivere i risultati

- Ogni misura, normalmente, riporta separatamente due errori: **statistico e sistematico** :

$$\text{BR} (K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0) = 0.21 \pm 0.01_{\text{stat}} \pm 0.02_{\text{sist}}$$

- La precisione della misura in questo esempio sarà :
 $e_{\text{BR}} = \Delta_{\text{BR}} / \text{BR} = (0.01 \oplus 0.02) / 0.21 \sim 0.11$

Combinare insieme le misure

- Perché combinare insieme più misure ?
- Da più misure indipendenti del tipo $(x_i \pm \sigma_i)$ di una stessa grandezza, come si ricava il valore più attendibile ?

$$\bar{x} = \frac{\sum p_i \cdot x_i}{P_{tot}}$$
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{P_{tot}}}$$

$\frac{1}{\sigma_i^2}$ ←

Combinare insieme le misure

- Perché combinare insieme più misure ?
- Da più misure indipendenti del tipo $(x_i \pm \sigma_i)$ di una stessa grandezza, come si ricava il valore più attendibile ?

$$\bar{x} = \frac{\sum p_i \cdot x_i}{P_{tot}} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{P_{tot}}}$$

$\frac{1}{\sigma_i^2}$ ←

$$x_1 = (0.49 \pm 0.03) \rightarrow p_1 = 1111$$

$$x_2 = (0.47 \pm 0.01) \rightarrow p_2 = 10000$$

Combinare insieme le misure

- Perché combinare insieme più misure ?
- Da più misure indipendenti del tipo $(x_i \pm \sigma_i)$ di una stessa grandezza, come si ricava il valore più attendibile ?

$$\bar{x} = \frac{\sum p_i \cdot x_i}{P_{tot}} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{P_{tot}}}$$

$\frac{1}{\sigma_i^2}$ ←

$$x_1 = (0.49 \pm 0.03) \rightarrow p_1 = 1111$$

$$x_2 = (0.47 \pm 0.01) \rightarrow p_2 = 10000$$

$$\bar{x} = \frac{1111 \times 0.49 + 10000 \times 0.47}{11111} = 0.472$$

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{11111}} = 0.009$$

$$x = (0.472 \pm 0.009)$$